I 24760

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL VI

ANUL 1926 — 1927.

BIBLIO STRA"

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1927.

1930

'05

2014

I 24760

ANUL VI. 15 MARȚIE 1926 NO. 1

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TR. LALESCU. DIVIZIUNEA POLINOAMELOR
2. NOTE MATEMATICE, 18, 19
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 491 499, 500, 501, 506
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

2454.

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abasohn Ernest,	Inginer, licenţiat în matematică, profesor la liceul Cantemir, Justinian 18, Bucureşti.
Abramescu N.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Adam D. Romeo,	Sublt. de geniu, Str. Lupeasca 49, Bucureşti.
Adamescu Maxim,	licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Flondor 37, Cernăuţi
Alaci Valeriu,	doctor în matematici, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara. Piaţa Doja 12, Timişoara.
Alexandrescu Elena,	profesoară la externatul secundar de fete din Constanţa. Argetoianu 7, Constanţa.
Angelescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Angheluţă Th.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Arghir Iancu,	profesor la liceul din Târgu-Jiu.
Bădulescu Vasile,	profesor liceul Şincai, Bucureşti.
Balaban N.,	profesor liceul Carol I., Craiova.
Balaban Gh.,	profesor şcoala secundară de fete gr. II Sturza Cantacuzino, Roman.
Balasz D.,	inginer Str. G-ral Joffre 12, Timişoara.
Bănărescu Marin,	inginer, la atelierele C. F. R. profesor la Politechnică. Str. Doja 51, Timişoara.
Banciu I.	profesor. Str. Lucaci 95, Bucureşti.
Baron C.,	asistent la catedra de fizică la Şc. Politechnică din Timişoara.
Blaşian V.,	inginer de mine, Subdirector general al Soc. Reşiţa, profesor la Şcoala Politechnică.
Botez Mihai,	profesor la şcoala normală şi liceul militar. Str. Speranţei 12, Iaşi.
Bratu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Breazu D.,	profesor la liceul din Caracal.
Buicliu Gh.,	loc.- colonel în artilerie, director de studii la şcoala specială de artilerie, profesor la şcoala Politechnică Timişoara.
Burghele C.,	inginer, asistent la Şcoala Politechnică Timişoara, Director la Fabrica Energia.
Butoescu Tr.,	Inginer la Uzina electrică Arad, asistent la Şcoala Politechnică.
Cândea C.,	doctor-inginer, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
Caraman E.,	Director Şcoala Normală, Galaţi.
Cârdeiu V.,	profesor la liceul Aron Pumnul, Cernăuţi.
Chivulescu C.,	licenţiat în matematici, inspector financiar Târgovişte.
Cismăres.u M.,	licenţiat în matematici, inspector financiar Turnu-Severin.
Ciurceu V.,	inginer la Uzina electrică Timişoara.
Corneanu P.,	inginer la Soc. Concordia Gura Ocniţei, Dâmboviţa.
Constantinescu Gh.,	profesor. Piaţa Elea 18, Craiova.
Crăciunescu I.,	profesor. Str. Unirii 65, Brăila.
Cristescu I.,	inginer, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara.
Coman August,	Director lic. C. Diaconovici Loga, Conferenţiar Şc. Politechnică, Str. Feldioara 1, Timişoara.
Diaconescu Nicolae	profesor, liceul din Slatina.
Dragalina Corneliu,	Lt.-Colonel. Str. G-ral Dragalina 1, Bucureşti.
Dumitrescu Crt.,	profesor la liceul militar M-rea Dealul, Târgovişte.
Dumitrescu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Dumitriu-Arad I.,	profesor la liceul Moise Nicoară, Str. Bucur 3, Arad.
Duţulescu Marin,	licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Eminescu 20, Bucureşti.
Florescu P. Mihai,	inginer, insp. silvic, Str. Alex. Orescu 9, Bucureşti.
Georgescu D.,	profesor la liceul din Piteşti. Str. Negru Vodă 14, Piteşti.
Ghermănescu M.,	profesor la liceul Cantemir. Str. Raion 31, Bucureşti.
Hubert M.,	inginer, profesor la Şcoala de meserii, asistent la Şcoala Politechnică. Bul. Mihai-Viteazul 21, Timişoara.
Hristea Horaţiu,	inginer la dep. C. F. R., asistent la Şcoala Politechnică.
Ionescu K. C.,	directorul liceului real din Braşov, Dr. Meşotă.
Jecu M. Ion,	licenţiat în matematici. Str. V. Lascar 77, Bucureşti.
Lalescu Traian,	doctor în matematici, profesor la Universitatea şi Şcoala Politechnică din Bucureşti, fost rector la Şcoala Politechnică din Timişoara, deputat.
Leonida D.,	inginer, profesor la Şcoala Politechnică.
Linteş I.,	căpitan în aviaţie. Licurg 4, Bucureşti.
Liteanu Gh.,	maior în artilerie. Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
Lupan Andrei,	inginer, director la Soc. Reşiţa, profesor la Şc. Politechnică. Str. Lonovici Timişoara.
Magheru I.,	doctor în ştiinţe, profesor la Şcoala Politechnică.

Manughevici C.,	inginer chimist, Şef de lucrări la Şcoala Politechnică. Str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
Mardan D.,	inginer şef, directorul fabricei de tutun, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Fabrica de tutun Timişoara.
Mihaly Elemer,	profesor la liceul Deva.
Nichifor Gh.	doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti. Str. Racoviţă 32, Bucureşti.
Nicolau Alex.,	inginer, profesor la Şcoala Politechnică.
Nicolau Pompiliu,	inginer, profesor la Şcoala Politechnică.
Noaghea Gh.,	profesor la liceul din Caransebeş
Onicescu O.,	profesor universitar. Clopotarii vechi 25, Bucureşti.
Orăşeanu C.,	inginer, licenţiat în matematici, profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
Orăşeanu Gr.,	profesor la liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
Otopeanu C.,	inginer, Bucureşti.
Petrescu A.,	doctor în matematici, Directorul Academiei Agricole Cluj.
Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oravita.
Purcariu Ilie,	directorul general al Ministerului Instrucţiei.
Roibănescu C.,	profesor. Str. Alex. Ştefulescu Nr. 1, Tg.-Jiu
Protopopescu I.,	inginer, subdirectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.
Saegiu E.,	inginer şef, serviciul construcţii C. F. R. Str. Berzei 70, Bucureşti.
Şerbănescu D-tru,	inginer la calea ferată Arad-Podgorie, asistent la Şcoala Politechnică.
Sergescu P.,	Dr. în matematici, licenţiat în filozofie, profesor supl. la Universitate. Ghica Voda 16, Craiova.
Severineanu C.,	inginer şef, subdirectorul Serviciului Tracţiunei C. F. R., profesor la Şcoala Politechnică Timişoara.
Simniceanu Sava,	profesor. Str. Griviţei 3, Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor, deputat Târgovişte.
Stăncescu C.,	doctor inginer, profesor la Şcoala Politechnică. Str. Bem 8, Timişoara.
Stoicescu M.,	profesor la liceul real, Braşov
Teodorescu C.,	inginer şef, profesor Şcoala Politechnică, directorul Şcoalei Superioare p. t. t. Timişoara.
Thierrin Gabriel	directorul Inst. Schewitz Thierrin. Str. Scaune 33, Bucureşti.
Tino Ovidiu,	profesor liceul Şincai. Str. Cornea 80, Bucureşti.
Toporescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona Rafineria Steaua Română, Câmpina.
Teodosiu Avram,	doctor în matematici, profesor la Academia Agricultură Cluj.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, Rectorul Şcoalei Politechnice. Str. Doja 33, Timişoara.
Vasiliu M.,	inginer, Str. Obedenaru 10, Bucureşti.
Vasiliu Gh..	inginer la depoul C. F. R. Str. Gen. Foch, Timişoara.
Vlad I. V.,	inginer, arhitect profesor la Şcoala Politechnică. Str. Bonnaz 20, Timişoara.
Zapan Grigore,	capitan-aviator. Str. Carol 9, Tecuci.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

ANUL VI. — No. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12, Timisoara
ADMINISTRATIA: Inginer-Şef, C. TEODORESCU
Directorul Şcoalei Superioare p. t. t. Timisoara

DIVIZIUNEA POLINOAMELOR

de TR. LALESCU
Profesor la Universitatea din Bucureşti

In acest articol, îmi propun să stabilesc câteva resultate fundamentale asupra diviziunei polinoamelor, resultate cari —, sunt surprins să o constat —, nu figurează în nici unul din cursurile clasice de Algebră Superioară, dar aşi fi de sigur şi mai surprins dacă ar fi cu totul noi, dat fiind caracterul cu totul clasic al chestiunei.

Este vorba de *predeterminarea* câtului a două polinoame. In acest articol voi trata succesiv această chestiune în cazurile următoare:

1°. Casul când divizorul este un binom de forma $x-a$.

2°. Casul când divizorul este un produs de forma $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$.

3°. Casul când divizorul este de forma $(x-a)^p$.

4°. Casul general când divizorul este un polinom oarecare dat sub formă generală, fără a fi descompus în factorii săi.

Resultatele sunt simple şi remarcabile; ele sunt susceptibile de numeroase aplicaţiuni. E interesant de semnalat rolul unor funcţiuni simetrice remarcabile, a căror lege de recurenţă este foarte simplă şi cari permit scrierea sub formă explicită a câtului şi restului unei diviziuni de polinoame în casul general.

1°. *Casul când divizorul e un binom de forma* $(x-\lambda)$.

Fie $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ polinomul dividend şi fie de determinat câtul şi restul împărţirei sale prin binomul $x-\lambda$.

Din faptul că polinomul $F(x)-F(\lambda)$ este evident divizibil prin $x-\lambda$, deducem că restul acestei împărţiri este $F(x)$, iar câtul, expresiunea:

$$\frac{F(x)-F(\lambda)}{x-\lambda}=a_0\frac{x^n-\lambda^n}{x-\lambda}+a_1\frac{x^{n-1}-\lambda^{n-1}}{x-\lambda}+\ldots+a_{n-1}\frac{x-\lambda}{x-\lambda}$$

adică:

$$a_0(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\lambda^2x^{n-3}+\ldots+\lambda^{n-1})+a_1(x^{n-2}+\lambda x^{n-3}+\ldots+\lambda^{n-2})+\ldots+a_{n-}$$

sau mai scurt:

$$(1)\qquad \Sigma a_i\lambda^s x^r,$$

în care numerile întregi şi positive i, s şi r iau toate valorile (inclusiv zero) legate prin relaţia:

$$i+s+r=n-1.$$

2°. *Casul când divizorul e un produs de mai mulţi factori binomi* $(x-a)\ldots(x-l)$.

Fie de împărţit $F(x)$ prin produsul $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_p)$. Pentru a găsi acest cât, e de ajuns a împărţi întâi pe $F(x)$ prin $(x-\lambda_1)$, de a împărţi apoi câtul astfel obţinut prin $(x-\lambda_2)$ şi aşa mai departe, până la ultimul factor $(x-\lambda_p)$.

Primul cât se poate scrie $C_1(x)=\Sigma a_i\lambda_1^{s_1}x^r$ cu condiţia $i+s_1+r=n-1$; pentru a găsi câtul prin $x-\lambda_2$, vom scrie:

$$\frac{C_1(x)-C_1(\lambda_2)}{x-\lambda_2}=\Sigma a_i\lambda_1^{s_1}\frac{(x^r-\lambda_2^r)}{x-\lambda_2}=\Sigma a_i\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2}x^r,$$

în care indicii şi exponenţii iau toate valorile întregi şi pozitive (inclusiv zero) legate prin relaţia:

$$i+s_1+s_2+r=n-2.$$

Regula este *generală*. Acelaşi procedeu aplicat succesiv de p ori ne conduce la rezultatul următor:

Câtul căutat este egal cu:

(2) $$\Sigma a_i \lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} \ldots \lambda_p^{s_p} x^r$$

în care indicii și exponenții iau *toate* valorile întregi și positive legate prin relația:

$$i + s_1 + s_2 + \ldots + s_p + r = n - p,$$

sau mai scurt:

$$i + \Sigma s + r = n - p.$$

Aceasta este regula câtului.

Resultatele acestea au fost publicate și în *Gazeta Matematică* acum câțiva ani. Ele mi-au fost reîmprospătate cu prilejul unui articol al d-lui *V. Alaci*, din *Rev. Mat. din Timișoara*, care s'a ocupat în special de casul când divizorul este de forma specială $(x - \lambda)^p$. Procedeul și resultatele de mai sus permit a se obține imediat formula stabilită de d-l *V. Alaci*. Este destul de a face $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = \lambda$ și a observa că toți termenii câtului cari conțin pe $a_i x^r$ (i și r fixi) vor fi egali între ei având drept coeficient pe λ^s în care $(s = s_1 + s_2 + \ldots + s_p)$; numărul acestor termeni este evident egal cu numărul termenilor unui polinom general de gradul s în raport cu variabilele $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ adică C^s_{p+s-1}.

Prin urmare câtul căutat este, în acest eas:

$$\Sigma C^s_{p+s-1} a_i \lambda^s x^r \quad \text{în care} \quad i + s + r = n - p.$$

4°. Fie de împărțit $F(x)$ printr'un polinom oarecare:

$$f(x) = x^p + b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + \ldots + b_p$$

Dacă descompunem pe $f(x)$ în factorii săi cădem în cazul 2°, și prin urmare, însemnând și aici prin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ rădăcinele polinomului $f(x)$, câtul va avea expresiunea (2). Examinând această expresiune, constatăm că ea se poate scrie sub forma:

$$C(x) = \Sigma a_i k_s x^r$$

în care *numai* k_s *depinde de divizor* și anume este egal cu funcțiunea simetrică:

$$k_s = \Sigma \lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} \ldots \lambda_p^{s_p} \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_p = s.$$

Aceste funcțiuni simetrice, conform teoremei fundamentale din teoria funcțiunilor simetrice, se exprimă rațional în funcțiune de coeficienții polinomului $f(x)$ și prin urmare, problema determinării explicite a câtului în casul general revine la determinarea acestor funcțiuni simetrice k_s.

Dar legea de determinare a acestor funcțiuni simetrice remarcabile se *deduce din însuși calculul* precedent. Intr'adevăr scriind, identitatea fundamentală a împărțirii, avem:

$$F(x) = f(x) \cdot C(x) + R(x).$$

Deci:

$$\Sigma a_i x^{n-i} = \Sigma b_j x^{p-j} \cdot \Sigma a_i k_s x^r + R(x)$$

și de oarece această identitate este adevărată ori care ar fi coeficienții a_i, avem:

$$1 = k_0$$

și

$$0 = \Sigma b_j k_s,$$

pentru toate valorile lui j și s, întregi și positive, a căror sumă e constantă; relațiunile de recurență sunt deci:

$$k_1 + b_1 = 0$$
$$k_2 + b_1 k_1 + b_2 = 0$$
$$k_3 + b_1 k_2 + b_2 k_1 + b_3 = 0,$$

și așa mai departe. Recunoaștem în aceste formule, unele din cele mai simple relațiuni de recurență, analoage cu acele ce dau sumele de puteri asemene, însă încă și mai simple. Putem deci enunța resultatul general următor:

I. *Câtul dintre polinoamele:*

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

și $$f(x) = x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_{p-1} x + b_p,$$

este egal cu: $\sum_{n-p} a_i k_s x^r$, $(i + s + k = n - p)$,

în care constantele k_s *sunt singurele elemente ce depind de divizor și sunt determinate de relațiunile de recurență:* $\Sigma b_r k_s = 0$ $(n + s = 1, 2, \ldots)$ *și* $b_0 = k_0 = 1$.

II. *Expresiunea sa desvoltată este:*

$$a_0 (x_q + k_1 x^{q-1} + \ldots + k_q) + a_1 (x^{q-1} + k_1 x^{q-2} + \ldots$$
$$\ldots + k_{q-2} + \ldots + a_{q-1} (x + k_1) + a_q \qquad (n - p = q).$$

Ea se obține imediat cu ajutorul polinoamelor lui Laguerre deduse din polinomul asociat, polinomului divizor:

$$x^m + k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \ldots + k_m.$$

III. *Câtul este o funcțiune lineară și omogenă în raport cu coeficienții dividentului, precum și de constantele k ale divizorului ($k_0 = 1$). La rândul lor constantele k_s sunt niște funcțiuni isobare și de pondere s în raport cu coeficienții divizorului, după cum rezultă din însăși definițiunea lor.*

NOTE MATEMATICE

18. — *Generalizarna problemei 492.*

Ne propunem a calcula suma seriei mai generală.

$$\sum_1^\infty \frac{n(n+2)\ldots(n+2m)}{[n+2(m+1)]\ldots[n+2(2m+3)]}$$

Insemnând cu u_n termenul general, ușor deducem:

$$\frac{u_n+2}{u_n} = \frac{[n+2(m+1)]^2}{n[n+2(2m+4)]}$$

De unde:

$$(1) \qquad n(n+4m+8)u_{n+2} = (n+2m+2)^2 u_n$$

Cum putem scri:

$$(n+2m+2)^2 \equiv (n-2)(n+4m+6)+4(m+2)^2,$$

relația (1) se poate scri:

$$n(n+4m+8)u_{n+2} = (n-2)(n+4m+6)u_n + 4(m+2)^2 u_n$$

Luând succesiv $n = 1, 2, 3, \ldots n-2, n-1, n$, avem:

$$1(9+4m)u_3 = -1(7+4m)u_1 + 4(m+2)^2 u_1$$
$$2(10+4m)u_4 = 0(8+4m)u_2 + 4(m+2)^2 u_2$$
$$3(11+4m)u_5 = 1(9+4m)u_3 + 4(m+2)^2 u_3$$
$$4(12+4m)u_6 = 2(10+4m)u_4 + 4(m+2)u_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-2)(n+4m+6)u_n = (n-4)(n+4m+4) + 4(m+2)^2 u_{n-2}$$
$$(n-1)(n+4m+7)u_{n+1} = (n-3)(n+4m+5) + 4(m+2)^2 u_{n-1}$$
$$n(n+4m+8)u_{n+2} = (n-2)(n+4m+6) + 4(m+2)^2 u_n$$

Adunând aceste egalități și făcând simplificările posibile, putem scri:

$$4(m+2)^2 \sum_1^n u_n = (7+4m)u_1 + (n-1)(n+4m+7)u_{n+1} + n(n+4m+8)u_{n+2}$$

Trecând la limită pentru $n = \infty$ și observând că ultimii doi termeni din membru al 2-lea tind către 1, putem scrie:

$$4(m+2)^2 \sum_1^n u_n = 2 + (7+4m)u_1 = 2 + \frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{(2m+3)(2m+5)\ldots(4m+7)} \cdot (7+4m),$$

sau:

$$\sum_1^\infty u_n = \frac{1}{2(m+2)} + \frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{(2m+3)(2m+5)\ldots(4m+5)} \cdot \frac{1}{4(m+2)^2}.$$

Pentru $m = 1$, găsim:

$$\sum_1^\infty u_n = \frac{1}{36} \cdot \left(2 + \frac{1.3}{5.7.9}\right) = \frac{211}{3780},$$

care ne dă tocmai problema 492.

N. TEODORESCU
Liceul Spiru Haret, București.

19. — *Generalizarea problemei 492.*

Ne propunem a calcula suma seriei mai generale:

$$\sum \frac{n(n+r)\ldots(n+pr)}{(n+qr)[n+(q+1)r]\ldots[n+(p+q+2)r]},$$

Insemnând cu u_n termenul general, putem scri:

$$\frac{u_{n+r}}{u_n}=\frac{[n+(p+1)r](n+qr)}{n[n+(p+q+3)r]n}$$

*** (1) $[n^2+(p+q+3)nr]u_{n+r}=[n^2+(p+q+1)nr+(p+1)qr^2]u_n$

Cum putem scri:

$$n^2+(p+q+1)nr+(p+1)qr^2\equiv(n-r)^2+(p+q+3)(n-r)r+r^2(p+2)(q+1),$$

relațiunea (1) se poate scri:

$$[n^2+(p+q+3)nr]u_{n+r}-[(n-r)^2+(p+q+3)(n-r)r]u_n=r^2(p+2)(q+1)u_n$$

Pentru $n=1, 2, 3\ldots n-2, n-1, n$, avem:

$$[1+(p+q+3)r]u_{r+1}-[(1-r)^2+(p+q+3)(1-r)r]u_1=r^2(p+2)(q+1)u_1$$

$$[4+2(p+q+3)r]u_{r+2}-[(2-r)^2+(p+q+3)(2-r)r]u_2=r^2(p+2)(q+1)u_2$$

. . . . . .

$$[(r+1)^2+(r+1)(p+q+3)r]u_{2r+1}-[1+(p+q+3)r]u_{r+1}=r^2(p+2)(q+1)u_{r+1}$$

$$[(r+2)^2+(r+2)(p+q+3)r]u_{2r+2}-[4+2(p+q+3)r]u_{r+2}=r^2(p+2)(q+1)u_{r+2}$$

. . . . . .

$$[n^2+n(p+q+3)r]u_{n+r}-[(n-r)^2+(p+q+3)(n-r)r]u_n=r^2(p+2)(q+1)u_n$$

Adunând aceste egalități obținem:

$$r^2(p+2)(q+1)\sum_1^n u_n=\sum_{i=1}^{r}[(n-r+i)^2+(n-r+i)(p+q+3)r]u_{n+i}-\sum_{i=1}^{r}[(i-r)^2+(i-r)(p+q+3)r]u_i$$

Dacă facem aci $n=\infty$, și observăm că toți termeni sumei:

$$\sum_{i=1}^{r}[(n-r+i)^2+(n-r+i)(p+q+3)r]u_{n+i}$$

tind către 1, deducem:

$$(2)\quad \sum_1^\infty u_n=\frac{r-\sum_{i=1}^{r}[(i-r)^2+(i-r)(p+q+3)r]u_i}{r^2(p+2)(q+1)}$$

Pentru $r=1$, $p=m-1$, $q=m$, obținem problema 19. Cap. XXXI din „C. de P." *de A. G. Ioachimescu.* In acest caz (2) devine:

$$\sum_1^\infty u_n=\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Pentru $r=2$, $p=1$, $q=2$, relația (2) ne dă:

$$\sum_1^\infty u_n=\frac{2-(1-12)u_1}{36}=\frac{1}{36}\cdot\left(2+\frac{1.3}{5.7.9}\right)=\frac{211}{3780},$$

tocmai problema 492.

N. G. BOTEA
Liceul Cantemir, București.

BIBLIOGRAFIE

1 *Gazeta Matematică,* anul XXXI, No. 6, Februarie 1926. Asupra polimamelor ortogonale, de *M. Ghermănescu.* Câteva teoreme în legătură cu cercurile tritangente, de *M. Grünbaum.* Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematică aplicate la științele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1924 — 31 August 1925, de *Locot. Col. Gh. Buicliu, Gh. Em. Filipescu, Locot.-Col. Gh. Liteanu.*

2. Foia Matematică, anul III, No. 2. Februarie 1926. Generare de identități de *Leon Weiss.*

3. *Curierul Matematic* vol. I, No. 11, Ianuarie 1926. Asupra ortopolului, de Slt. *M. I. Focseneanu.* Chestiuni de examinat, de *M. Grünbaum.*

4. *Curierul Matematic,* vol. I, No. 12, Februarie 1926. Asupra seriei hypergeometrice, de *Tiberiu Popovici.* Asupra unor puncte coliniare de *D-tru Nestor.*

5. *Revista Matematica Bârlădeană,* anul I, No. 3, Martie 1926. Note remarcabile, de *N. G. Botea.*

PROBLEME REZOLVATE

491. — *Dându-se ecuațiile:*

$$\begin{cases} x^2+nx+m+2=0 \\ x^2+px+m=0, \end{cases}$$

se cer valorile întregi ale coeficienților m, n, p pentru care ele admit o rădăcină comună, precum și acea rădăcină.

N. TEODORESCU

Pentru ca ecuaţiile:

$$\begin{cases} a x^2 + b x + c = 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \end{cases}$$

să admită o rădăcină comună, trebuie ca eliminantul lor să fie nul, adică:

$$(1) \qquad (a\gamma + \alpha c)^2 - (a\beta - b\alpha)(b\gamma - c\beta) = 0.$$

In cazul enunţului nostru, condiţia (1) devine:

$$(1) \qquad (p - n)[m n - p(m + 2)] = 4$$

m, n, p fiind întregi, rezultă că (1) e satisfăcut luând sistemele:

$$\begin{cases} p - n = 1 \\ m n - p(m+2) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} p - n = -1 \\ m n - p(m+2) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - n = 2 \\ m n - p(m+2) = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p - n = -2 \\ m n - p(m+2) = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} p - n = 4 \\ m n - p(m+2) = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p - n = -4 \\ m n - p(m+2) = -1 \end{matrix}$$

Primul sistem ne dă:

$$(2) \qquad \begin{cases} p = n + 1 \\ m = -2n - 6 \end{cases}$$

unde n este un întreg oarecare.

Al doilea sistem ne dă:

$$(3) \qquad \begin{cases} p = n - 1 \\ m = 2n + 2, \end{cases}$$

unde n este un întreg oarecare.

Sistemul al treilea:

$$(4) \qquad \begin{cases} p = n + 2 \\ m = -2n - 4, \end{cases}$$

unde n este un întreg oarecare.

Al patrulea sistem ne dă:

$$(5) \qquad \begin{cases} p = n - 2 \\ m = n, \end{cases}$$

unde n este un întreg oarecare.

Ultimele două sisteme sunt incompatibile în numere întregi.

Să găsim acum rădăcina comună. Scăzând ecuaţiile date avem:

$$(p - n)x - 2 = 0,$$

şi evident că rădăcina comună satisface şi această ecuaţie, deci ea este:

$$x = \frac{2}{p - n},$$

adică este 2, — 2, 1, — 1, corespunzătoare sistemelor (2), (3), (4) şi (5).

Soluţii date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braester I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Cernes A. M.* (lic. Naţional, Iaşi), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Feldstein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Ionescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Manolescu I. Niculae* (Focşani), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Niculescu Emanuel* (lic mil., Craiova), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Vulpanovici Boriş* (Chişinău).

499. — *Să se pună sub forma unui produs de trei factori, suma:*

$$bcm^2(bp - cn) + can^2(cm - ap) + abp^2(an - bm),$$

şi să se deducă apoi că determinantul:

$$\begin{vmatrix} b^2p - c^2n & abp & -acn \\ -bap & c^2m - a^2p & bcm \\ can & -cbm & a^2n - b^2m \end{vmatrix} = 0,$$

este nul.

N. G. Botea.

Putem scri succesiv:

$$bcm^2(bp-cn)+can^2(cm-ap)+abp^2(an-bm)=$$
$$b^2cm^2p-bc^2m^2n+c^2an^2m-ca^2n^2p+$$
$$a^2bp^2n-ab^2p^2m+abcpmn-abcpmn=$$
$$abp^2(an-bm)-bcmp(an-bm)+$$
$$c^2mn(an-bm)-acnp(an-bm)=$$
$$(an-bm)(abp^2-bcmp+c^2mn-acnp)=$$
$$(an-bm)[bp(ap-cm)-cn(ap-cm)]=$$
$$-(an-bm)(bp-cn)(cm-ap).$$

Deci:

$$(1)\qquad bcm^2(bp-cn)+can^2(cm-ap)+$$
$$abp^2(an-bm)=-(an-bm)(bp-cn)(cm-ap).$$

Am descompus astfel expresiunea dată într'un produs.

Să luăm acum determinantul dat pe care îl însemnăm cu Δ și să'l desvoltăm după regula lui *Sarus* și reducând avem:

$$(2)\qquad \Delta=(b^2p-c^2n)(c^2m-a^2p)(a^2n-b^2m)+$$
$$c^2a^2n^2(c^2m-a^2p)+b^2c^2m^2(b^2p-c^2n)+$$
$$a^2b^2p^2(a^2n-b^2m).$$

Dacă în identitatea (1) înlocuim a, b, c, respectiv prin a^2, b^2, c^2 și trecem totul în primul membru, obținem tocmai pe Δ, deci:

$$\Delta=0,$$

ceea ce era de dovedit.

Soluții date de d-nii: *Alexandru A. Marcu* (Șc. Polit., Timișoara), *Aposteanu Gh. Ion* (lic. Timișoara), *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Atanasiu T. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Băcanu V. Ion* (lic. Pitești), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Cocorandu Dan* (șc. milit. de Geniu, București), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focșani), *Mareș Grigore* (lic. Bacău), *Marineanu Traian* (lic. Timișoara), *Mogoșan C. Remus* (Șc. Polit., Timișoara), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. mil., Craiova), *Nicolescu Emil* (Șc. Polit. Timișoara), *Niculescu Șt. Emanuel* (lic mil., Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. I.* (lic Lazăr, București), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Țanovici V.* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasilescu Al.* (lic. Ploești), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

500*. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia*

$$E=\sin(2a-b)+\sin(2b-c)+$$
$$\sin(2c-a)-\sin(a+b+c).$$

I. PROTOPOPESCU

Sumând sinusurile două câte două expresia date se poate scri:

$$E=2\sin\frac{(2a-b)+(2b-c)}{2}\cos\frac{(2a-b)-(2b-c)}{2}+$$
$$2\sin\frac{(2c-a)-(a+b+c)}{2}\cos\frac{(2c-a)+(a+b+c)}{2}$$

$$\ast\ast\ast\quad E=2\sin\frac{2a+b-c}{2}\cos\frac{2a-3b+c}{2}+$$
$$2\sin\frac{-(2a+b-c)}{2}\cos\frac{b+3c}{2}$$

$$\ast\ast\ast\quad E=2\sin\frac{2a+b-c}{2}\left(\cos\frac{2a-3b+c}{2}-\cos\frac{b+3c}{2}\right)$$

Sumând expresia din parantesă obținem

$$E=2\sin\frac{2a+b-c}{2}\cdot$$
$$2\sin\frac{(2a-3b+c)+(b+3c)}{2}\sin\frac{(b+3c)-(2a-3b+c)}{4}$$

$$\ast\ast\ast\quad E=4\sin\frac{2a+b-c}{2}\sin\frac{2b+c-a}{2}\sin\frac{2c+a-h}{2}$$

expresie calculabilă prin logaritmi.

Observația 1°. Unii corespondenți făcând substituția.

$$\alpha = 2a - b,\quad \beta = 2b - c,\quad \gamma = 2c - a$$

din care rezultă:

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c$$

au redus expresia la:

$$E' = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

tratată ca exercițiu în „Culegeri" și manuale.

2°. D-l *Vasiliu Gh. Gh.* a transformat expresia de forma

$$E = \sin(p\,a - b) + \sin(p\,b - c) + \sin(p\,c - a) - \sin(p - 1)(a + b + c)$$

Soluție dată de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Militar, Craiova) *Băcanu V. Ion* (lic. I. C. Brătianu, Pitești), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, București), *Bey M. Gh.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Beșchea G. Nic.* (lic. Dr. I. Meșota, Brașov), *Cocorandu Dan* (Șc. Mil. de Geniu, București), *Dângă S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Th.* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzeu), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Iacob Șt. Eugen* (lic. Botoșani), *Ieremia Petru* (lic. C. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Ionescu-Bujor Th. Andrei, Ionescu-Bujor Th. Constantin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Iscovici Paul* (lic. I. C. Brătianu, Pitești), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Mariș Marius, Mocuța Traian* (lic. Arad), *Morțun Emil* (lic. Gh. Lazăr, București), *Munteanu Gh.* (lic. Mil., Craiova), *Nicolescu Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Niculescu Șt. Em.* (lic. Mil., Craiova), *Novacu Valeriu* (iic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic. Gh. Lazăr, București), *Pascariu Alexe* (Șc. Polit., Timișoara), *Pâslariu I. Nic.* (lic. R.-Sarat), *Patron Nic.* (lic. Mil., Iași), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Podariu Al.* (lic. Petru Rareș, Piatra-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (lic. I. Maiorescu Giurgiu), *Papluca G. Mircea* (lic. Moise Nicoară, Arad) *Rădulescu Mihai* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Segal Leon* (lic. Laurian, Botoșani), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Spacu G. Petre* (Șc Polit., Timișoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Țărăș Vasile* (lic. Brașov), *Țanovici V. C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasilescu Al.* (lic. Ploești), *Vasilescu-Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic Diaconovici-Loga, Timișoara), *Vladiminschii V., Winkler A. Alfred* (Seminarul Pedagogic Univ., Iași), *Ullea Titus* (lic. Internat, Iași).

501*. — *Să se stabilească identitatea:*

$$3\sum_{i=0}^{2k}\sin(2i+1)t - \sum_{i=0}^{2k}\sin(4k+2i+3)t = 4\frac{\sin^4(2k+1)t}{\sin t}$$

V. ALACI

Dacă în formula cunoscută care însumează sinusurile arcelor în progresie aritmetică, anume:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \sin(\alpha+2h) + \ldots + \sin[\alpha+(n-1)h] = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}},$$

luăm succesiv:

$$\alpha = t,\ h = 2t,\ n = 2k+1;$$

$$\alpha = (4k+3)t,\ h = 2t,\ n = 2k+1,$$

avem:

$$(1)\quad \sum_{i=0}^{2k}\sin(2i+1)t = \frac{\sin(t+2kt)\sin(2k+1)t}{\sin t} = \frac{\sin^2(2k+1)t}{\sin t}$$

$$(2)\quad \sum_{i=0}^{2k}\sin(4k+2i+3)t = \frac{\sin(6k+3)t\sin(2k+1)t}{\sin t}$$

Multiplicând cu 3 relația (1) și adunând'o cu (2), avem:

$$3\sum_{i=0}^{2k}\sin(2i+1)t - \sum_{i=0}^{2k}\sin(4k+2i+3)t = \frac{\sin(2k+1)t[3\sin(2k+1)t - \sin(6k+3)t]}{\sin t} = 4\frac{\sin^4(2k+1)t}{\sin t}$$

Soluții date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Cerneș A. M.* (lic. Național, Iași), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Feldștein M. So-*

ANUL VI. 15 APRILIE 1926 No. 2

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. I. CRĂCIUNESCU. PATRULATER CU LATURILE TANGENTE LA CERC
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 314, 348, 412, 420, 427 495, 504, 505
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMAȚIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 80 lei
Anul III, broșat, 80 lei
Anul IV, broșat, 80 lei
Anul V, broșat, 80 lei.

---

omon (lic. Piteşti), *Grozăvescu Dumitru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ionescu Angelo* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Manolescu I. Niculae* (Focşani), *Munteanu Gheorghe* lic. milit., Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Niculescu S. Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Corneliu* (lic. Giurgiu), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Siminonov Kindin* (lic. Tulcea), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Spacu Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tunaru Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Winkler A. Alfred* (Seminarul Pedag., Iaşi).

506*. — *Să se construiască un triunghiu dreptunghic, cunoscând suma sau diferenţa catetelor şi suma sau diferenţa între ipotenuză şi una din catete. Să se examineze toate cazurile care se pot prezenta.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Soluţie dată de d-l *N. Gh. Botea* (lic. Cantemir, Bucureşti).

Fie A B C un triunghiu dreptunghic cu vârful drept în A. Din punct de vedere algebric datele problemei se pot asocia în următoarele feluri.

$$\text{I}\begin{pmatrix} b+c \\ a+b \end{pmatrix};\quad \text{II}\begin{pmatrix} b+c \\ a-b \end{pmatrix};\quad \text{III}\begin{pmatrix} b-c \\ a+c \end{pmatrix};\quad \text{IV}\begin{pmatrix} b-c \\ a-b \end{pmatrix};$$

$$\text{V}\begin{pmatrix} b-c \\ a+b \end{pmatrix};\quad \text{VI}\begin{pmatrix} b-c \\ a-c \end{pmatrix};\quad \text{VII}\begin{pmatrix} b+c \\ a-c \end{pmatrix};\quad \text{VIII}\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \end{pmatrix}.$$

Pe o figură se vede însă că I şi VIII sau II şi VII se pot trata în acelaşi fel. Apoi în V făcând diferenţa $(a+b)-(b-c)$ se recade peste III după cum din VI se deduce IV înlocuind cunoscuta $a-c$ prin diferenţa $(a-c)-(b-c)$.

In concluzie problema va fi complect rezolvată dacă se vor considera numai primele 4 cazuri.

Cazul I. Se dă

(1) $\quad b+c=2n$ şi (2) $\quad a+b=2m.$

Fie A B C triunghiul cerut şi O mijlocul ipotenuzei B C iar O′ proecţia lui O pe A C. Se ştie că dacă punctele B şi C descriu axele Ay şi Ax iar suma $b+c$ rămâne constantă atunci punctul O descrie dreapta B′C aşa că

$$AB'=AC'=\frac{b+c}{2}=n$$

Dacă se ia pe A C un punct D aşa în cât

$$AD=\frac{a+b}{2}=m$$

şi dacă în D se duce o perpendiculară Δ pe A C atunci distanţa OO'' a lui O la Δ este egală cu O A.

In adevăr:

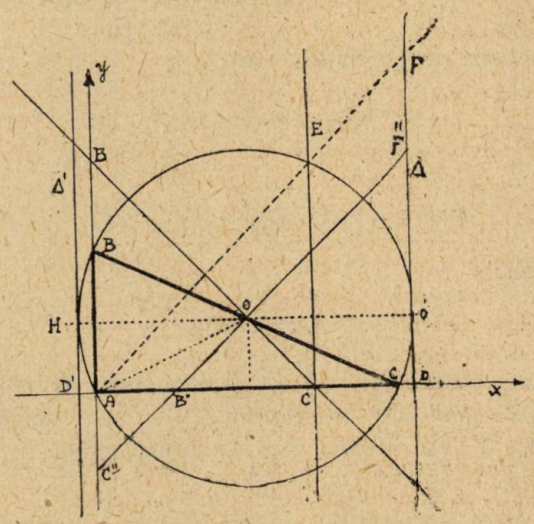
(3) $\quad OO''=AD-AO'=m-AO'$

dar:

$$OA+AO'=\frac{a+b}{2}=m$$

(4) $\quad \therefore\ OA=m-AO'$

Fie E simetricul lui A faţă de B′C′. Din cele spuse până aici rezultă



$$OA=OE=OO''$$

Deci O este centrul unui cerc care trece prin punctele fixe A, E şi este tangent dreptei fixe Δ. Această problemă este cunoscută. Construcţia cercului se face astfel. Fie F intersecţia lui Δ cu A E Se duce un cerc oare care prin A şi E. Din F se

duce tangenta F T la acest cerc apoi se ia pe Δ lungimile F O″ și F O‴ egale cu F T. Cercul O va fi acela determinat de punctele A, E, O″ sau A, E, O‴. Problema admite 2 soluțiuni pentru O când A și E sunt de aceiași parte a lui Δ.

O dată determinat O se iau intersecțiile B și C ale cercului de centru O și C a lui A față de raza O A cu A x și A y.

Problema este posibilă când A și E sunt de aceiași parte a lui Δ. Pent u aceasta este destul ca :

$$A C' < A D \text{ sau } n < m$$

căci se vede pe figura 1 că E C′ este paralelă cu Δ.

Cu această condițiune avem totdeauna 2 soluțiuni.

Cazul II. Se dă

$$b + c = 2n \text{ și } a - b = 2m.$$

Punctul O se va găsi tot pe o dreaptă B′ C′ construită ca la cazul I. Fie D′ un punct luat pe C′ A așa în cât :

$$A D' = m$$

iar H proecția lui O pe paralela la A B, dusă prin D′.

Se vede de pe figura 1 că :

$$A O = m + A O'$$

iar :

$$O H = A O' + A D' = m + A O'.$$

Deci :

$$A O = O H.$$

Prin urmare punctul O pentru cazul II va fi centrul unui cerc trece prin A, E și este tangent dreptei Δ. Se revine deci la construcțiile de la cazul I.

In acest caz condiția de posibilitate a problemei este :

$$m < n$$

dedusă din relațiile de mărime ale laturilor triunghiului dreptunghic. Problema are 2 soluțiuni sau nici una.

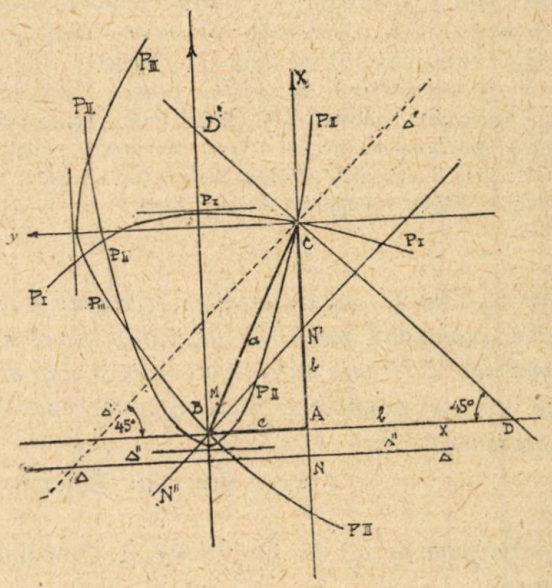
Cazul III. Se dă :

$$b - c = 2n \ , \ a + c = 2m.$$

Fie B″ punctul de pe C A pentru care :

$$A B'' = C A - A B = n.$$

Pe figura 2 se vede că unind B″ cu O, mijlocul lui B C avem :



$$B'' O' = AC - AB'' - O'C = b - n - \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = OO'$$

Triunghiul dreptunghic O O′ B′ fiind isoscel rezultă că unghiul O B′ O′ este de 45° deci O descrie o dreaptă fixă B″ O care tae pe A B în un punct C″ așa că :

$$A B'' = A C'' = n.$$

Luăm acum pe A C punctul D așa fel că :

$$A D = m,$$

și reducem problema ca la cazul I la construcția unui cerc cu centrul pe B″ C″, trecând prin A și tangent dreptei Δ.

Problema este posibilă și admite 2 soluțiuni dacă :

$$A B'' < A D \text{ sau } n < m.$$

Cazul IV. Se dă :

$$b - c = 2n \ , \ a - b = 2m.$$

Punctul O se va afla ca și la III pe dreapta $B''C''$ din figura 1. Luăm pe C A punctul D' așa că

$$AD' = m$$

și construim dreapta Δ' paralelă cu A B. Fie H proecția lui O pe Δ Se vede ușor, ca și la cazurile precedente că

$$OA = OH$$

Deci construcția este analoagă cu cea de la cazul II.

Problema este totdeauna posibilă.

Observațiuni. 1°. Problema 506 a fost propusă ca problemă de geometrie. Corespondenții, în afară de d-l *Botea G.*, i-au dat însă soluții algebrice sau trigonometrice rezolvând sistemul de ecuații dedus din enunț și complectat cu condiția

$$x^2 + y^2 = z^2$$

dintre laturile triunghiului dreptunghic.

2°. Au dat foarte bune soluțiuni algebrice d-nii: *Ardelea R.* (lic. Militar, Craiova), *Cocorandu D.* (Șc. Militară de Geniu, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Gavrilescu I.* (lic. Ploești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Nestor D.* (lic. Cantemir, București), *Iscovici P.* (lic. Pitești), *Lupescu E.* (lic. Pitești), *Nicolau Dobridor I.* (lic. Militar, Craiova), *Sobel M.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Solomon F.* (lic. Pitești), *Stoica A.* (lic. Cantemir, București), *Tăraș V.* (lic. Șaguna, Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Vlădea I.* (lic. Șauna, Brașov). *Winkler A.* (Sem. Pedag., Iași).

3°. Au dat foarte bune soluțiuni trigonometrice d-nii *Bey Gh.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București).

4°. Se poate da problemei și soluțiuni bazate pe cunoștințe de geometrie analitică. Iată o astfel de soluțiune.

Cazul I. Fie D un punct pe B A așa în cât:

$$AD = AC = b.$$

Triunghiul dreptunghic DAC fiind isoscel unghiul ADC este de 45° și deci un loc al punctului C este dreapta D D'. Punctul B este fix căci:

$$DB = b + c = 2n.$$

Prin ipoteză avem:

$$CA + CB = a + b = 2m. \tag{1}$$

Luând origina de coordonate în B și pe A B cu axă de x atunci se găsește că locul lui C satisfăcând relația (1) este parabola:

$$\sqrt{x^4 + y^2} + y = 2m$$

$$\therefore \quad x^2 = -4my + 4m^2.$$

Această parabolă notată pe figură cu P_I taie dreapta D D', de ecuație:

$$x + y - 2n = 0,$$

în două puncte numai dacă $m > n$. Intersecțiile parabolei cu D D' dau vârful C al triunghiului căutat. Unesc C cu B și scobor perpendiculara C A și obțin triunghiul cerut.

Cazul II. Locul lui C este dreapta D D' dela cazul precedent. Se ia pe C B și pe C A punctele M și N așa că:

$$CA = CM = a \quad \text{și} \quad AN = 2m.$$

De oarece:

$$MB = a - b = 2m,$$

urmează că:

$$CA + AN = CM + MB = CN = CB.$$

Locul lui N fiind o paralelă Δ la A B, a lui C va fi o parabolă P_{II} P_{II}, cu focarul în B și cu directoarea Δ. Intersecțiile acestei parabole cu D D' dau vârful C. Unesc C cu B și scobor perpendiculara C A. Obțin astfel triunghiul cerut.

Cazul III. Se rezolvă ca și cazul I. Pe C A iau punctul N' așa că:

$$CN' = 2n = b - c.$$

Locul lui B va fi linia $N'N''$ care face 45° cu A C. Apoi luând origina în C și pe A C ca axă de x se găsește că locul punctelor B pentru care:

$$BC + BA = a + c = 2m,$$

este parabola:

$$x^2 = -4my + 4m^2,$$

care este notată P_{III} P_{III} pe figură. Intersecțiile acestei parabole cu $N'N''$ dau vârful B după care urmează ușor construcția triunghiului A B C.

Cazul IV. Se dă:

$$b - c = 2n \quad \text{și} \quad a - b = 2m.$$

Pe A C iau punctul N' așa că:

$$AN = c \quad \text{deci} \quad CN = 2n.$$

Locul lui N' este evident dreapta B N' care face 45° cu B A iar locul lui C va fi o dreaptă Δ' paralelă la B N'. Duc dreapta Δ'' paralelă cu A B, la distanța $2m$ de ea și de partea opusă a lui C. Pe figură se vede că:

$$CN = b + 2m = a = CB,$$

adică C descrie o parabolă, notată tot cu P_{II} pe figură, cu focarul în B și cu directoarea Δ''. Intersecțiile parabolei P_{II} cu Δ' dau vârful C.

5°. Problema încă nu e complect rezolvată. Mai are o parte, ceva mai subtilă, pe care o las încă pe seama corespondenților. Anume să se găsească mijlocul de a face construcțiile diferitelor triunghiuri în condițiile enunțului, atunci când diferențele date $a-b$, $a-c$ sau $b-c$, sunt mici.

Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

525. — Să se găsească numerile prime de cinci cifre consecutive, în care suma ultimelor două cifre este egală cu suma primelor două, iar suma cifrelor să fie un patrat perfect.

POPESCU C. VIRGILIU

526. — Să se găsească patratele perfecte de șase cifre, astfel atât numărul format de primele trei cifre, cât și cel format de ultimele trei cifre să fie patrate perfecte.

GH CONSTANTINESCU

527. — Fie un punct M în planul triunghiului ABC, fie A', B', C' punctele în care dreptele AM, BM, CM întâlnesc respectiv laturile BC, CA, AB și fie A'', B'', C'' punctele în care aceste laturi sunt întâlnite de o dreaptă Δ. Se consideră punctele A_1 (B'C'', B''C'), B_1 (C'A'', A'C''), C_1 (A'B'', B'A''). Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

N. G. BOTEA

528. — Se dau în plan două cercuri O_1 și O_2. Un al treilea cerc O_3 taie pe O_1 în A și B, și pe O_2 în C și D. Dreptele AB și CD se taie în E, dreptele O_1O_3 și AB în F și dreptele O_2O_3 și CD în G.

1°. Să se arate că patrulaterul EFO_3G e inscriptibil.

2°. Să se găsească locul lui E când cercul O_3 variază trecând prin punctele A și C, care rămân fixe.

3°. In aceleași condițiuni de variațiune a cercului O_3 să se găsească locul geometric al punctelor F și G.

4°. Dreapta AB trece printr'un punct fix, când cercul O_3 variază trecând prin C și D, care rămân fixe.

5°. Cercul O_3 variind ca la 4° să se găsească locul geometric al lui F.

ION PROTOPOPESCU

529. — Să se descompună în factori suma:

$$\sum_{i=0}^{35} x^i$$

V. ALACI

530. — Să se determine p și q din ecuația:

$$x^2 - px + q = 0,$$

astfel ca rădăcinele ei x' și x'' să satisfacă relațiile:

$$\begin{cases} \sqrt{x''+10} = \dfrac{2x''}{3} \\ x''\sqrt[6]{256\,x'} = 12\,x' \end{cases}$$

NATALIA DUMITRESCU

531. — Să se demonstreze inegalitatea

$$\sin x < \operatorname{arc\,tg} x,$$

pentru un arc x cuprins între 0° și 90°.

LOCOT.-COL. GH BUICLIU

532. — Notațiile fiind cele cunoscute într'un triunghiu, să se stabilească relația:

$$\frac{(r-h_a)(r-h_b)}{(r+r_a)(r+r_b)(r-r_c)} + \frac{(r-h_b)(r-h_c)}{(r+r_b)(r+r_c)(r-r_a)} + \frac{(r-h_c)(r-h_a)}{(r+r_c)(r+r_a)(r-r_b)} = -\frac{3}{4R}$$

CONSTANTIN TH. IONESCU BUJOR

INFORMATIUNI

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenții mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL VI. — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

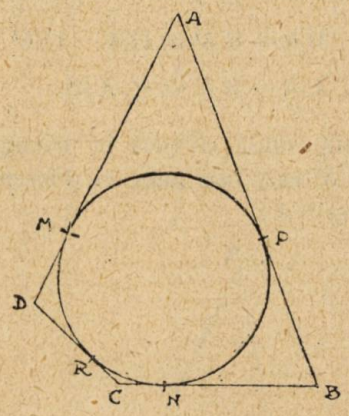
REDACTIA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12, Timisoara
ADMINISTRATIA: Inginer-Şef, C. TEODORESCU
Directorul Şcoalei Superioare p. t. t. Timisoara

PATRULATER CU LATURILE TANGENTE LA CERC

de I. CRACIUNESCU

Condiţiunea necesară şi suficientă ca un patrulater, convex sau concav, să aibă laturile tangente la un cerc, este ca suma a două laturi oarecare să fie egală cu suma celorlalte două laturi.

Cercul este tangent la laturile patrulaterului convex ABCD ca în figurile I şi II, iar la patrulaterul concav ABCD ca în figurile III, IV, V.



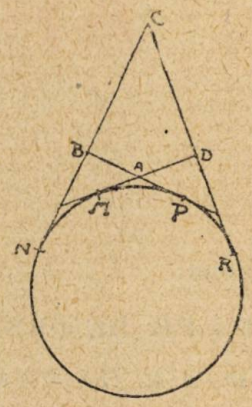
In figura I, avem identităţile:

$$AB=AP+PB;\ BC=BN+NC;$$

$$CD=CR+RD;\ DA=DM+MA$$

şi fiindcă $AP=AM$, $BP=BN$, $CN=CR$, $DR=DM$, rezultă:

$$AB+CD=AD+BC.$$



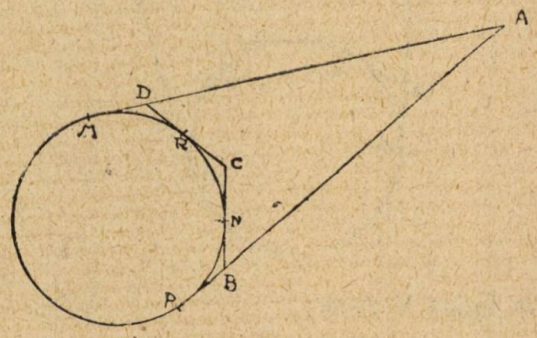
In figura II avem identităţile:

$$AB=BP-AP,\ BC=CN-BN,$$

$$CD=CR-DR,\ DA=DM-AM,$$

de unde rezultă:

$$AB+BC=CD+AD.$$



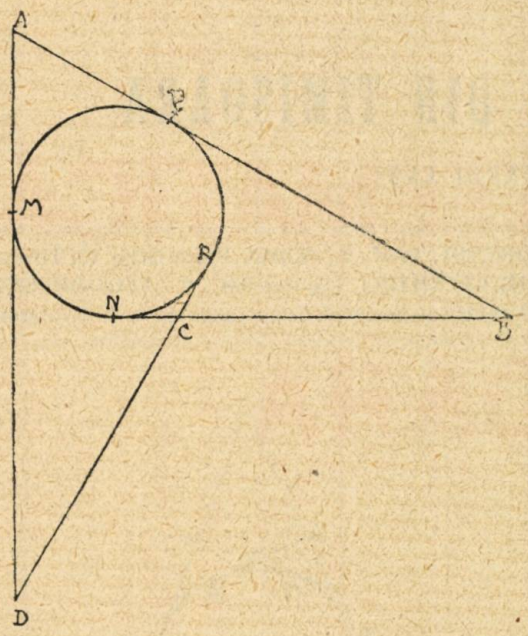
In figura III avem:

$$AB=AP-BP,\ BC=BN+NC,$$

$$CD=CR+RD,\ DA=AM-DM,$$

de unde rezultă:

$$AB+BC=CD+AD.$$



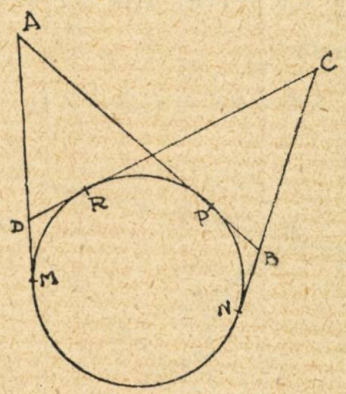
In figura IV avem:

$$AB = AP + PB,\ BC = BN - CN,$$

$$CD = DR - CR,\ DA = AM + MD,$$

de unde rezultă:

$$AB + CD = AD + BC.$$



In figura V avem:

$$AB = AP + PB,\ BC = CN - BN,$$

$$CD = CR + RD,\ DA = AM - DM,$$

de unde rezultă:

$$AB + BC = CD + AD.$$

Deci am demonstrat că, pentruca un patrulater convex sau concav să aibă laturile tangente la un cerc, este necesar ca suma a două laturi oarecare, să fie egală cu suma celorlalte două, sau:

$$(1) \qquad AB \pm BC = AD \pm CD.$$

Să demonstrăm acum că această condiție este și suficientă.

Să presupunem că avem un patrulater $ABCD$ convex sau concav, ca în una din cele 5 figuri, ale cărui laturi satisfac relația:

$$AB \pm BC = AD \pm CD.$$

Să demonstrăm că acest patrulater are laturile tangente la un cerc. Ducând bisectoarele unghiurilor C și D interioare sau exterioare după forma patrulaterului, cari se întâlnesc în punctul O, găsim centrul cercului tangent la laturile BC, CD și DA. Să presupunem că latura BA nu este tangentă la cercul O. Ducem atunci prin punctul B tangenta BA' la cercul O, care tae latura DA în A'. Patrulaterul $A'BCD$ având laturile tangente la cercul O, rezultă că avem relația:

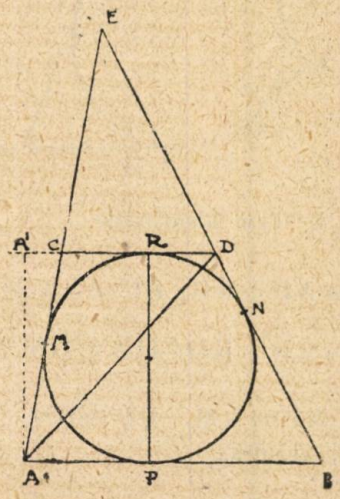
$$A'B \pm BC = A'D \pm CD.$$

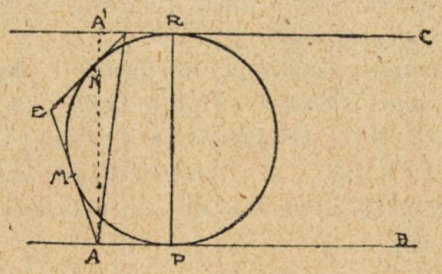
Scăzând această egalitate din (1), avem:

$$BA - BA' = DA - DA'$$

$$\therefore\ BA - BA' = \pm AA',$$

egalitate imposibilă, fiindcă în triunghiul $AA'B$ o latură AA' este mai mare ca diferența celorlalte două BA și BA'.





Dacă patrulaterul are două laturi paralele ca în figura VI, unde două laturi opuse sunt paralele, sau ca în figura VII, când patrulaterul este deschis, se poate demonstra o proprietate analoagă.

Condiția necesară și suficientă ca laturile patrulaterului să fie tangente la un cerc, este ca proecția diagonalei pe direcția laturilor paralele să fie egală cu diferența laturilor neparalele, cuprinse între punctul lor de întâlnire și diagonala considerată.

Intr'adevăr avem:

$$ED = EN \mp DN \text{ și } EA = EM + MA.$$

Scăzând, avem: $EA - ED = EM + MA - EN \pm DN = MA \pm DN = AP \pm DR$ luând semnul $+$ pentru figura VI și $-$ pentru figura VII.

Dacă A_1 este proecția lui A pe CD, egalitatea precedentă devine, fiindcă $AP = A_1R$:

$$EA - ED = A_1R \pm DR = A_1D$$

(2) $\therefore$ $EA - ED =$ proecția AD.

Să arătăm că această condiție este și suficientă: Bisectoarea unghiului A și cu o paralelă la laturile AB și CD echidistantă de ele, se întâlnesc în un punct O care este centrul cercului tangent la laturile AB, CD și AE. Să presupunem că latura DE nu este tangentă la cercul O. Fie DE' tangenta la cercul O dusă din D și care întâlnește latura AE în punctul E'. Patrulaterul AB'CDE' având laturile tangente la un cerc, rezultă că:

$$E'A - E'D = \text{pr. } AD.$$

Scăzând această relație din (2), obținem:

$$EA - E'A + E'D - ED = 0$$

$$\therefore \quad E'D - ED = \pm EE',$$

egalitatea imposibilă fiindcă în triunghiul EE'D avem $EE' > E'D - ED$.

Din demonstrația făcută rezultă câteva proprietăți ale conicilor: Unind două puncte oarecare ale unei elipse sau iperbole cu focarele, obținem un patrulater care are laturile tangente la un cerc, fiindcă evident suma sau diferența a două laturi este egală cu suma sau diferența celorlalte două. Deci cele șase bisectoare ale patrulaterului se vor întâlni în același punct, centrul cercului. Rezultă dar:

1) Tangentele în două puncte ale unei elipse sau iperbole și cu bisectoarele unghiurilor formate de razele vectorii a punctelor de contact, sunt patru drepte concurente.

Dacă o tangentă este dusă într'un vârf pe axa focarelor, proprietatea precedentă devine;

2) Dreptele care unesc un focar cu cele două puncte de intersecție ale tangentelor dela vârfurile axei focale cu o tangentă arbitrară, sunt bisectoarele unghiurilor formate de axa focarelor cu raza vectorie a punctului de contact, și deci sunt perpendiculare.

La o parabolă dacă luăm două puncte și le unim cu focarul și ducem prin cele două puncte două paralele la axa parabolei, obținem un patrulater deschis cu două laturi paralele, și care are laturile tangente la un cerc, fiindcă diferența distanțelor celor două puncte ale parabolei la focar, este evident egală cu diferența distanțelor acelorași puncte la directoare, care diferență este proecția pe axă a dreptei care unește cele două puncte. Deci:

3) Tangentele sau normalele în două puncte ale unei parabole și cu bisectoarea unghiului format de razele vectorii ale punctelor de contact, sunt trei drepte concurente în un punct așezat la egală depărtare de cele două paralele;

4) Tangenta arbitrară la parabolă întâlnește tangenta la vârf în un punct așezat pe bisectoarea unghiului format de axă cu raza vectorie a punctului de contact. La o iperbolă se pot deduce și alte proprietăți, dacă considerăm asimptota în locul unei tangente.

Din proprietatea patrulaterului cu laturile tangente la cerc, se poate deduce o proprietate analoagă la un patrulater cu laturile tangente la o conică oarecare. Este evident că unind centrul cercului cu vârfurile patrulaterului circumscris, obținem patru triunghiuri cari sunt astfel încât suma

suprafețelor a două triunghiuri este egală cu suma suprafețelor celorlalte două. Egalitatea suprafețelor se păstrează și în proecție, așa că proprietatea de mai sus este adevărată și pentru o elipsă, care este proecția cercului. Proprietatea aceasta este generală pentru toate conicele cu centru, și ca să demonstrăm, vom proceda prin analogie cu demonstrația dela cerc.

Dacă dintr'un punct exterior ducem două tangente la o conică cu centru, suprafețele celor două triunghiuri formate cu aceste tangente și cu centrul conicei, sunt egale.

Aceasta fiind evident la un cerc, va fi evident și la o elipsă care este proecția cercului. Să arătăm că este adevărat și pentru o iperbolă și demonstrația este generală pentru toate conicile cu centru. Fie M A și M B cele două tangente la conică și O centrul conicei, $x_1 y_1$; $x' y'$; $x'' y''$ coordonatele punctelor M, A și B. Dreapta M O trece prin mijlocul segmentului A B, fiindcă M O este diametrul conjugat direcției A B, ceeace se poate constata făcând produsul coeficienților unghiulari ai dreptelor M O cu ecuația $y = \frac{y_1}{x_1} x$ și polara A B a punctului M cu ecuația $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$ și ne dă $-\frac{b^2}{a^2}$.

Scriind analitic că mijlocul coardei A B de coordonate $\frac{x' + x''}{2}$, $\frac{y' + y''}{2}$ se găsește pe dreapta M O de ecuație $y = \frac{y_1}{x_1} x$, găsim:

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{x' + x''}{2}$$

$$y' x_1 - x' y_1 = x'' y_1 - y'' x_1.$$

Cei doi membri ai acestei egalități sunt suprafețele triunghiurilor O M A și O M B scrise sub forma de determinant, adică supr. O M A = supr. O M B.

Bazat pe acestă proprietate și urmând mersul demonstrației dela cerc, demonstrăm următoarea proprietate:

Dacă un patrulater are laturile tangente la o conică cu centru și unim centrul cu cele patru vârfuri, se formează patru triunghiuri astfel ca suma suprafețelor a două din ele este egală cu suma celorlalte două.

In o figură analoagă cu figura 1 dela cerc, avem: supr. O A B = O A P + O P B; O B C = O B N + O N C; O C D = O C R + O R D; O D A = O D M + O M A; și fiindcă O A P = O A M; O B P = O B N; O C N = O C R; O D R = O D M, rezultă că:

$$O A B + O C D = O A D + O B C.$$

și tot așa demonstrăm și pentru celelalte figuri.

Dacă considerăm parabola ca o conică cu centrul la infinit în direcția axei, proprietățile conicilor cu centru devin la parabolă:

Proecțiunile pe direcția directoarei, a celor două tangente duse din un punct la o parabolă, sunt egale, proprietate deja cunoscută.

Dacă un patrulater este circumscris unei parabole, suma proecțiunilor pe directoare a două laturi este egală cu suma proecțiunilor celorlalte două laturi.

Cu ajutorul acestor proprietăți ale conicilor, putem demonstra următoarele:

Locul centrelor conicilor tangente la patru drepte date, sunt trei linii drepte.

Fie $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$; $x_4 y_4$ coordonatele celor patru vârfuri ale patrulaterului $A_1 A_2 A_3 A_4$ și $x y$ coordonatele centrului O al conicei tangente la patrulater. Ca să găsim locul geometric căutat, scrim că suma suprafețelor a două triunghiuri formate cu laturile patrulaterului și cu centrul O, este egală cu suma celorlalte două; în toate modurile posibile:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

sau mai pe scurt:

$$D_{12} + D_{34} = D_{41} + D_{23}$$

dacă însemnăm cu D_{12}, etc. determinanții corespunzători. De asemenea și ecuațiile:

$$D_{12} + D_{23} = D_{34} + D_{41}$$

$$D_{12} + D_{41} = D_{23} + D_{34}$$

Aceste trei ecuații sunt de gradul I și deci reprezintă trei linii drepte.

Fiindcă parabola este o conică cu centrul la infinit în direcția axei, putem spune că cele trei ecuații reprezintă cele trei axe ale celor trei parabole tangente la laturile patrulaterului considerat.

NOTE MATEMATICE

3. — *Asupra problemei* 492. Vom da o altă metodă pentru soluționarea acestei probleme rezolvată în No. 12, an. IV.

In adevăr, dacă $f(x)$ este o funcție oarecare și n un întreg pozitiv, avem:

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}[f(k+2)-f(k)]=f(n+1)+f(n+2)-f(1)-f(2)$$

Dacă luăm:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x+4)(x+6)(x+8)},$$

atunci:

$$f(k+2)-f(k)=\frac{(k+4)\varphi(k+2)-(x+10)\varphi(k)}{(k+4)(k+6)(k+8)(x+10)}$$

Acum ne propunem a determina pe $\varphi(x)$ astfel ca:

$$(2)\qquad (k+4)\varphi(k+2)-(k+10)\varphi(k)\equiv k(k+2)$$

E suficient să luăm pentru $\varphi(x)$ un trinom de gradul al 2-lea

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c$$

și (2) devine:

$$(k+4)[a(k+2)^2+b(k+2)+c]-(k+10)(ak^2+bk+c)\equiv k^2+2k.$$

Prin identificare și simplificare rezultă:

$$\begin{cases} -2a=1 \\ 20a-4b=2 \\ 8a+4b-3c=0 \end{cases} \text{ și deci: } \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-3 \\ c=-\frac{16}{3} \end{cases}$$

Atunci:

$$\varphi(x)=-\frac{x^2}{2}-3x-\frac{16}{3}=-\frac{3x^2+18x+32}{6}$$

și deci:

$$(3)\qquad f(x)=-\frac{3x^2+18x+32}{6(x+4)(x+6)(x+10)}$$

Luând în relația (1) pentru $f(x)$ expresia (3), $n=\infty$ și ținând seamă de (2), avem:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+2)}{(k+4)(k+6)(k+8)(k+10)}=\frac{3+18+32}{6.5.7.9}+\frac{12+36+32}{6.6.8.10}=\frac{53}{1890}+\frac{1}{36}=\frac{211}{3780}$$

Avem astfel efectuată însumarea din problema 492.

Am putea prin aceiași metodă efectua însumarea mai generală:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+r)\ldots(k+pr)}{(k+qr)[k+(q+1)r]\ldots[k+(p+q+2)r]},$$

folosind relația:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+r)-f(k)]=f(n+1)+f(n+2)+\ldots+f(n+r)-f(1)-f(2)-\ldots-f(r),$$

și luând pentru $f(x)$ expresiunea:

$$f(x)=\frac{a_0x^{p+1}+a_1x^p+\ldots+a_{p+1}}{(x+qr)[x+(q+1)r]\ldots[x+(p+q+1)r]},$$

în care coeficienții $a_0, a_1, \ldots a_{p+1}$, trebue să fie astfel ca să avem:

$$(k+qr)[a_0(k+r)^{p+1}+a_1(k+r)^p+\ldots+a_{p+1}]-[k+(p+q+2)r](a_0k^{p+1}+a_1k^p+\ldots+a_{p+1})\equiv k(k+r)\ldots(k+pr).$$

V. ALACI

4. — *Determinarea unui polinom* $f(x)$ *astfel ca:*

$$(1)\qquad f(x+1)-f(x)\equiv\varphi(x)\equiv x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1),$$

Pentru aceasta să dăm lui x, în mod succesiv toate valorile cari anulează pe $\varphi(x)$. Obținem astfel egalitățile:

$$\begin{aligned} f(1)-f(0)&=0\\ f(0)-f(-1)&=0\\ f(-1)-f(-2)&=0\\ &\ldots\ldots\ldots\\ f(-n+2)-f(-n+1)&=0 \end{aligned}$$

Ţinând seama că $f(0)=0$ de oarece:

$$f(x)=\alpha_0 x^{n+1}+\alpha_1 x^n+\alpha_2 x^{n-1}+\alpha_3 x^{n-2}+\ldots+\alpha_n x$$

şi având în vedere egalităţile (2), deducem:

$$f(1)=f(0)=f(-1)=f(-2)=\ldots=f(-n+1)=0$$

Rezultă deci că polinomul $f(x)$ admite rădăcinile:

$$1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ (-n+1)$$

şi luând în considerare că numărul acestor rădăcini este $(n+1)$ şi că gradul lui $f(x)$ este tot $(n+1)$, putem scrie:

$$f(x)=\alpha_0 (x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n-1)$$

Introducând această valoare în (1) şi simplificând cu $\varphi(x)$ în ambii membri, găsim imediat:

$$\alpha_0=\frac{1}{n+1}$$

Substituind pe $f(x)$ în identitatea evidentă:

$$\sum_{x=1}^{k}[f(x+1)-f(x)]=f(k+1)-f(1)$$

obţinem:

$$\sum_{x=1}^{k} x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n-1)=\frac{k\,(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n)}{n+1}$$

(A se vedea § 7, pag. 100, No. 3, an. III, R. M. T. articolul „Asupra câtorva însumări" de D-l *V. Alaci*).

I. Al. Stoenescu

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 7, Martie 1926. Asupra a două figuri asemenea, de *N. Abramescu*. Asupra unei probleme de maxim şi minim, de *Miron Niculescu*. Revistele matematice, de Col. *Gh. Buicliu*.

2. *Foia Matematică*, anul III, No. 3, Martie 1926. Asupra unor chestiuni de geometrie, de *N. G. Botea*.

3. *Buletinul Societăţii studenţilor în Matematice*, No. 4, (litografiat). Linii trase pe o suprafaţă, de *A. Niculescu*. Teoremă de geometria triunghiului, de *T. Popovici*. Funcţii ce satisfac o condiţie *Appel*, de *Gr. Moisil*. Discriminantul unei ecuaţii algebrice, de *T. Popovici*. O problemă de geometrie, de *E. Ballan*.

4. *Curierul Matematic*, (litografiat), vol. II, No. 1. După un an, *Comitetul*. Asupra unor ecuaţii cu rădăcini reale, de *N. G. Botea*. Asupra unor sisteme de linii, de *I. Vasiliu*. Câteva proprietăţi remarcabile, de *O. Bolgiu*.

5. *Ziarul Matematic*, an. I., N-rile 1, 2, 3 şi 4, (litografiat), cuprind: Prefaţă, de *Leescu Petru* şi *Vulpanovici Boris*. Curiozităţi matematice, *Jean D'Alembert*, de A. Resetnic. Patrate magice, de *Vulpanovici B.* Asupra derivatelor, de *Leescu Petru*. *Augustin Louis Cauchy*, de *Leescu Petru*. Aliagii şi titluri, de *Leescu Petru*. Premii. Spaţiul cu patru dimensiuni, de *Vulpanovici B.*

6. *N. Nicolescu. Sur une classe de séries dont le cercle de convergence est une ligne singulière essensielle.* (Extrait, Bulletin de la *Société des Sciences de Cluj*, 1-er decembre 1925).

7. *G. Vrânceanu. Sulla integrazione del problema dei due corpi nel caso in cui la massa sia funzione liniare del tempo.*

(Estratto dal vol. III, serie 6-a, 1° sem., fasc. 4°, *Rendiconti della R. Academia Nazionale dei Lincei*).

8. *Ion P. Condiescu. Doctrina administrativă*, preţul 10 lei.

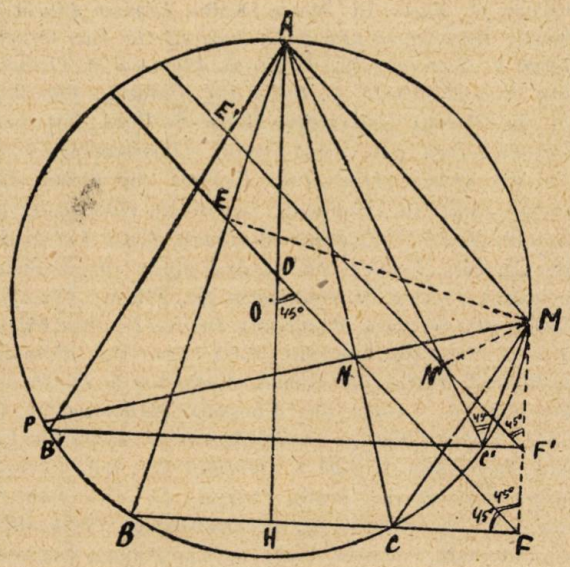
PROBLEME REZOLVATE

314. — *Pe cercul O circumscris triunghiului* ABC *se ia un punct* M, *astfel ca arcul* AM = 90°. *Din* M *se duce pe* AC *perpendiculara* MN, *iar din* N *se duce dreapta* ND, *care formează cu înălţimea* AH *a triunghiului, unghiul* NDH = 45°. *Dreapta* ND, *întâlneşte laturile* AB *şi* BC *în* E *şi* F. *Să se dovedească că patrulaterele* AMNE *şi* CNMF *sunt inscriptibile. Să se mai dovedească că dreptele lui Simson ale punctului M faţă de triunghiul variabil* ABC *care îşi păstrează vârful* A *fix şi latura* BC *paralelă cu ea însăşi, sunt paralele.*

V. Alaci

Unghiul ANM fiind drept, urmează că arc AM + arc PC = 180°, şi cum arc AM = 90°, atunci şi arc PC = 90°, deci $\sphericalangle$ PMC = 45°. De altă parte în triunghiul dreptunghic DHF, unghiul FDH fiind de 45°, urmează că şi unghiul DFH = 45°.

Patrulaterul CNMF având $\sphericalangle$ NMC = $\sphericalangle$ NFC = 45°, este inscriptibil.



Patrulaterul CNMF fiind astfel inscriptibil și unghiul CNM fiind de 90°, urmează că și $\sphericalangle CFM = 90^0$, adică MF este perpendiculară pe BC. Dreapta EF unind deci picioarele perpendicularelor din M pe două laturi ale triunghiului ABC, este dreapta lui *Simson* a punctului M față de triunghiul ABC și punctul E unde ea întâlnește cea de a treia latură este piciorul perpendicularei din M, pe ea; de unde urmează că și patrulaterul AMNE este inscriptibil, având, $\sphericalangle AEM = \sphericalangle ANM = 90^0$.

Să demonstrăm acum și ultima parte a problemei. Fie E'F' dreapta lui *Simson* a punctului M față de triunghiul AB'C', în care B'C' este paralelă cu BC. Patrulaterul MN'C'F' este inscriptibil, având $\sphericalangle MN'C' = MF'C' = 90^0$, de unde rezultă că $\sphericalangle N'C'M = N'F'M$ și egal cu 45° fiindcă arc $AM = 90^0$. Fiindcă $\sphericalangle EFM = \sphericalangle E'F'M = 45^0$, urmează că dreptele lui *Simson* EF și E'F', sunt paralele.

Soluții date de d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Șc. Polit. București), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *David I. Ioan* (Buzău), *Gabrielescu C. V.*, *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu) *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Popovici Aurel* (Focșani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul), *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai Viteazul, București), și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealul).

348. — *Să se verifice identitatea:*

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 4(ab - cd)(ac - bd) = [(a+d)^2 - (b+c)^2][(a-d)^2 - (b-c)^2]$$

I. DUMITRIU-ARAD.

Însemnând cu E membrul al doilea, putem scrie succesiv:

$$E = (a^2 - d^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 + [(a+d)(b-c)]^2 - [(a-d)(b+c)]^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + (ab + bd - ac - cd)^2 - (ab - bd + ac - cd)^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + (2ab - 2cd)(2bd - 2ac) = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 4(ab - cd)(ac - bd),$$

și astfel identitatea este verificată.

Soluții date de d-nii: *Agapescu Nicolae* (Semin. Pedag., Iași), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avram Iorgu* (lic. Bacău), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botez Șt. Mihail*, *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Bruda Nicolae* (lic. Făgăraș), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Comanescu-Balteni Al.* (lic. Slatina), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Constantinescu Mihail* (lic. Cantemir, București), *Constantinidi Radu* (Roman), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Dânga G. Vlad* (lic. Orhei), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitrescu Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Dumitrescu Gh. Ioan Brezuica*, *Eleomir*, *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Florescu Gh. Oprea* (Craiova), *Foca I.*, *Frăsineanu Mărioara* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Șc. Polit., Timișoara), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *I. N. Georgescu-Valeriu* (Dadilov), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Goldstein N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit, Timișoara), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Hătăran D. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Halchias G.* (lic. Caracal), *Iacob Șt. Eugen* (Botoșani), *Ianculescu Octavian* (Șc. Super. Industrială, Timișoara), *Iliuță I. Ioan* (lic. Caracal), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit, Timișoara), *Ionescu Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Kertesz Paul*, *Lepădatu I. Vic-*

tor (lic. Internat, Iași), *Manafu Valeriu* (lic. Mrea Dealu), *Manoil Adolf*, *Manoil Eugeniu* (Maior. Șc. Spec., Artilerie), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Marinesca Al.* (Șc. de Artilerie), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mariș Marius* (lic. Arad), *Mihăilescu Șt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, București), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Moașa D-tru* (lic. Brașov), *Moașa Virgil* (lic. Brașov), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Niculescu Alex.* (lic. Tg.-Mureș), *Niculescu S. Victor* (lic. Cantemir, București), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Oana Ioan* (lic. Făgăraș), *Petrescu Șt. Alexandru-Dan* (lic. milit., Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Podariu Alex.* (lic. Piatra-Neamț), *Polacsek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Octavian* (lic. Făgaraș), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion*, *Predescu I. Nicolae* (lic. Caracal), *Pușcă Toma* (lic. Internat, Iași), *Roman D. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rosu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), *Schächter M. Oziaș* (lic. Galați), *Segal David* (lic. Cantemir, București), *Șerban Aurel* (lic. Brașov), *Șerban T. Tiberiu*, *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Șc. Polit., Timișoara), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit., Timișoara), *Staicu Irimie* (lic. Brașov), *Steriopol D. Ștefan* (lic. Caracal), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu Theodor* (lic. Internat, Iași), *Taraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasilescu Bartolomen* (lic. Sf. Sava, București), *Velea Gr. Mihail* (lic. milit., Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Wagner I.* (lic. Carol, Craiova).

412. — *Să se găsească cel mai mic patrat perfect a b format din patratele perfecte a și b scrise unul după altul, știindcă dacă după $\sqrt{a}$ se scrie $\sqrt{b}$, se obține tot un patrat perfect.*

COL. GH. BUICLIU

Cel mai mic număr $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ patrat perfect ar putea fi un număr de două cifre, deci dintre: 16, 25, 36, 48, 64, 81.

Numerile $a\,b$ corespunzătoarele, ar fi: 136, 425, 936, 1681, 3616, 641. Dintre acestea observăm că numai $1681 = 41^2$, este patrat perfect.

Soluția cerută este astfel, 1681, *a* fiiind 16, iar *b*, 81.

Soluții date de d-nii: *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boroș P. Dan*, *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Caracostea Andreiu* (lic. Lazăr, București), *Călin M. Gh.* (lic. Cnracal), *Chirilă Ion* (lic. Innat, Iași), *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Cristescu C. Ioan* (lic. Gh. Șincai, București), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei) *Diaconu B. Mariu* (lic. M-rea Dealu), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dumitrescu Gh. Ioan*, *Fezi E. Gh.* (lic. Orheiu), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Florescu M. Octavian*, *Foca Ilie*, *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gavrilescu Ion* (lic. Ploești), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit., Timișoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Gherbanovsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Grabowski Eugeniu* (lic. Orhei), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, București), *Halchias G.* (lic. Caracal), *Iacob Șt. Eugeniu* (Botoșani), *Iliuță I. Dăbuleni* (lic. Caracal), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu M. Haralambe* (lic. Pitești), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focșani), *Munteanu Gh.* (lic. milit., Craiova), *Neacșu Vasile*, *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. mil., Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Petrescu Șt. Alex.-Dan* (lic. mil., Craiova), *Podariu Al.* (Piatra-Neamț), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Polaczek Frant* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Internat, Brașov), *Popescu T. Alexandru* (Giurgiu), *Popescu E.* (lic. Galați), *Popovici Th. Ioan*, *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iași), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Severin Marcel* (lic. Botoșani), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu Teodor* (lic. Internat, Iași), *Surugiu V.* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Ullea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara), *Vasiliu Nicolae* (lic. Focșani), *Velea Gr. Mihail* (Craiova) și *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, București).

420. — *După un număr de două cifre se scrie dublul său, iar apoi triplul acestuia din urmă și se formează un patrat perfect de șase cifre. Care-i acel patrat?*

COLONEL GH. BUICLIU

Din enunț reiasă că numărul de două cifre, trebue să fie astfel ca produsul său cu 6 să fie tot de două cifre și numerile de două cifre cari îndeplinesc această condiție sunt:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Numerile rezultate din acestea, conform ecunțului, sunt:

(1) 102060, 112266, 122472, 132678, 142884, 153090, 163296.

Ținând seama că un patrat perfect nu se poate termina de cât cu una din grupele, 00, 01, 09, 21, 25, 29, 36, 41, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 71, 84,

89, 96 (C. de P.), rezultă privind numerile din şirul (1), că numai 142884 şi 163296 ar putea fi patrate perfecte. Extrăgând însă rădăcina patrată vedem că numai 142884 e patrat perfect:

$$142884 = 378^2,$$

şi e tocmai patratul cerut.

Soluţii date de d-nii: *Apostoiiu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Beşchea Nicolae* (Braşov), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Caracostea Andrei* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Chinie Mihail* (lic. Piteşti), *Chiru Nanov* (lic. Internat, Iaşi), *Ciomofoiu Horia* (lic. Lazăr, Sibiu), *Constantinescu Marius* (lic. Slatina), *Cristescu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit,, Timişoara), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dima Şt. Iliescu-Şelaru*, *Dină M. Nicolae* (lic. Caracal), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Drăghiceanu M.* (lic. Braşov), *Drogeanu N. Paul* (Sem., Pedag., Bucureşti), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu-Olteţ* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Hulubei Telemac* (lic. Internat Iaşi), *Jacob Şt. Eugen* (lic. Botoşani), *Iliovici C-tin* (lic. Ploeşti), *Iliuţă I. Ion* (lic. Caracal), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolescu I. Emil* (Ploeşti), *Niculescu Emanuel* (lic. Mil., Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Puşcă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara). *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu I. A.* (lic. M-rea Dealu), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iaşi), *Surugiu Vasile* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) şi *Zamfirescu Gh. Ioan.*

427. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{(\sin\alpha\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta)^2}{[(\sin\alpha\operatorname{ch}\beta)^2 + (\cos\alpha\operatorname{sh}\beta)^2][(\sin\alpha\operatorname{sh}\beta)^2 + (\cos\alpha\operatorname{ch}\beta^2)]} = 1$$

V. VÂLCOVICI

In virtutea relaţiilor cunoscute:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{sh}^2\beta - \operatorname{ch}^2\beta = 1,$$

primul membru al identităţii pe care să'l notăm cu E, se poate scri succesiv:

$$E = \frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) + \operatorname{sh}^2\beta(\operatorname{sh}^2\beta - 1)}{[\sin^2\alpha(\operatorname{sh}^2\beta - 1) + (1-\sin^2\alpha)\operatorname{sh}^2\beta][\sin^2\alpha\operatorname{sh}^2\beta + (1-\sin^2\alpha)(\operatorname{sh}^2\beta - 1)]} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \operatorname{sh}^4\beta - \operatorname{sh}^2\beta}{(\operatorname{sh}^2\beta - \sin^2\alpha)(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 1)} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \operatorname{sh}^4\beta - \operatorname{sh}^2\beta}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \operatorname{sh}^4\beta - \operatorname{sh}^2\beta} = 1,$$

ceiace trebuia stabilit.

Soluţii date de d-nii: *Adam Eugen* (lic. Timişoara), *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Bernardis B.* (Şc. Polit., Timişoara), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Deoanca Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Frătici I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Gradin Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Iacob St. Eug.* (lic. Botoşani), *Ioachim Grigore* (lic. Mil., Iaşi), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor*, *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani) *Nicolau G. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Nicolescu Emil* (Şc. Polit. Timişoara), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popovic Aurel* (lic. Focşani), *Popovici I. Dan* (Chişinău), *Puşcă I.* Toma (lic. Internat, Iaşi), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Segârceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Spacu G. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi) şi *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara).

495. — *Un număr de trei cifre înmulţit cu numărul format de primele lui două cifre şi scăzând răsturnatul său de asemenea înmulţit cu numărul format de primele lui două cifre, dă un număr de patru cifre, la care inversând ordinea primelor două, căpătăm un patrat perfect. Care e acel număr?*

IOAN TH. POPOVICI

Fie $a\,b\,c$, numărul cerut. Trebue să avem:

$$(100a + 10b + c)(10a + b) - (100c + 10b + a)(10c + b) = N,$$

sau: $$1000(a^2 - c^2) + 199(a - c)b = N.$$

Observăm că trebue să avem $a > c$ şi pentruca N să fie de patru cifre, trebue ca $a^2 - c^2 \leq 9$, condiţie ce ne impune a lua:

$a=5$, $c=4$; $a=4$, $c=3$; $a=3$, $c=2$, 1, 0; $a=2$, $c=1$, 0; şi $a=1$, $c=0$, N este deci respectiv de formele:

$$9000+199\,b,\ 7000+199\,b,\ 5000+199\,b,$$
$$8000+398\,b,\ 9000+597\,b,\ 3000+199\,b,$$
$$4000+398\,b,\ 1000+199\,b.$$

Dacă am lua $b=0$, N ar putea fi 9000, 7000, 5000, 8000, 3000, 4000, 1000 şi dintre acestea numai 9000, 4000 şi 1000 sunt astfel că inversându-le primele două cifre, obţinem patrate perfecte. Pentru abc am avea astfel numerile 504, 300, 200, 100. Numerile 300, 200, 100 nu pot fi luate ca soluţii căci inversele lor sunt de o singură cifră, avem deci numai soluţia 504.

Nu putem lua $b=1$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 99, 98, 97 şi un patrat perfect, nu se poate termina cu una din aceste grupe, (C. de P. pag. 50).

Dacă am lua $b=2$, ultimele două cifre ale lui N, ar fi 98, 96, 94 şi pentru N n'am putea lua de cât formele care se termină cu 96, adică $8000+796=8796$ şi $4000+796=4796$, cărora inversându-le primele două cifre, obţinem 7896 şi 7496, care nu's patrate perfecte. Nu putem lua $b=3$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 97, 94, 91 şi un patrat perfect nu se poate termina cu una din aceste grupe.

Dacă am lua $b=4$, ultimele două cifre ale lui N ar fi 96, 92, 88, şi pentru N n'am putea lua decât formele care se termină cu $199\,b$, deci N ar putea fi:

$$9000+796=9796.\ 7796,\ 5796,\ 3196,\ 1796,$$

cărora inversându-le primele două cifre, ne dau respectiv:

$$7996,\ 7796,\ 7596,\ 7396,\ 7196.$$

Dintre acestea numai 7396 este patrat perfect, $7396=86^2$, şi corespunde $a=2$, $c=1$, $b=4$, avem deci soluţia 241.

Nu putem lua $b=5$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 95, 90, 85 şi un patrat perfect nu se poate termina cu una din aceste grupe.

Nu putem lua $b=6$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 94, 88, 82 şi un patrat perfect nu se poate termina cu una din aceste grupe.

Nu putem lua $b=7$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 93, 86, 79 şi un patrat perfect nu se poate termina cu una din aceste grupe.

Dacă am lua $b=8$, ultimele două cifre ale lui N ar fi 92, 84, 76 şi pentru N n'am putea lua decât formele ce se termină cu 84 şi 76, N ar putea fi deci:

$$8000+3184=11184,\ 4000+3184=7184,$$
$$9000+4776=13776.$$

Dintre acestea numai 7184 este de patru cifre şi inversându-i primele două cifre ne dă 1784, care nu-i patrat perfect.

Nu putem lua $b=9$, căci ultimele două cifre ale lui N ar fi 91, 82, 73 şi nici un patrat perfect nu se termină cu una din aceste grupe.

Singurele soluţii sunt deci 241 şi 504.

Soluţii date de d-nii: *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Buureşti), *Constantinescu G. Gh.* (lic. Carol Craiova), *Cristescu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Grabovski Eugeniu* (Orhei), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Mil. Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. Mil., Craiova), *Podariu Alexandru, Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu G. Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Wikler Alfred* (Semin. Pedag. Iaşi).

504. — *Să se dovedească că expresiunea:*

$$10^{11^n}+1,$$

se divide prin 11^{n+1}.

GH CONSTANTINESCU

Vom folosi următoarea teoremă a lui *Euler*.

Dacă A şi B sunt numere prime între ele, atunci:

$$(1)\qquad A^{\varphi(B)}-1=\text{mult}.\,B,$$

$\varphi(B)$ fiind indicatorul lui B.

Dacă luăm $A = 10$, $B = 11^{n+1}$, atunci:

$$\varphi(11^{n+1}) = 11^n \times 10,$$

şi (1) devine:

$$10^{11^n \times 10} - 1 = \text{mult}.\, 11^{n+1},$$

sau:

(2) $$(10^{11^n \times 5} + 1)(10^{11^n \times 5} - 1) = \text{mult}.\, 11^{n+1}.$$

Cum,

$$10^{11^n \times 5} - 1 = (11 - 1)^{11^n \times 5} - 1 = \text{mult}\, 11 - 2 \neq \text{mult}.\, 11,$$

rezultă din (2):

$$10^{11^n \times 5} + 1 = \text{mult}.\, 11^{n+1}.$$

Dar:

(3) $$10^{11^n \times 5} + 1 = 10^{11^n} + 1)(10^{11^n \times 4} - 10^{11^n \times 3} + 10^{11^n \times 2} - 10^{11^n} + 1) = \text{mult}.\, 11^{n+1}.$$

Cum factorul al 2-lea nu se divide cu 11, fiind că luând $10 = 11 - 1$, avem:

$$10^{11^n \times 4} - 10^{11^n \times 3} + 10^{11^n \times 2} - 10^{11^n} + 1 = \text{mult}.\, 11 + 1 - (\text{mult}\, 11 - 1) + (\text{mult}\, 11 + 1) - (\text{mult}.\, 11 - 1) + 1 = \text{mult}\, 11 + 5 \neq \text{mult}.\, 11.$$

rezultă din (3):

$$10^{11^n} + 1 = \text{mult}.\, 11^{n+1},$$

tocmai ce trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iouescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Bujor Th. C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Piteşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti).

505. — *Se cer patratele perfecte de patru cifre, în care ultima cifră, care este un patrat perfect, este egală cu prima cifră, iar dacă scădem cifra 3-a din a 2-a, căpătăm un patrat perfect.*

C. N. BALASESCU

Ultima cifră fiind patrat perfect şi egală cu prima cifră, nu poate fi decât 1, 4 sau 9, iar numărul cerut este deci de forma, $1ab1$, $4ab4$, $9ab9$. Rădăcinele patrate a acestor numere nu pot fi evident de cât: 39, 41, 49; 62, 68, 72, 78; 93, 97, ale căror patrate sunt respectiv:

1521, 1681, 2401; 3844, 4624, 5184, 6084;

8649, 9409.

Dintre acestea, numai numerile 1521, 1681, 4624, 9409 au prima cifră egală cu ultima, iar dintre acestea numai 4624 şi 9409 sunt astfel că scazând cifra a 3-a din a 2-lea căpătăm un patrat perfect.

Patratele perfecte cerute sunt deci, 4624 şi 9409.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin Pedag., Iaşi), *Albeaţă N. Ermil* (lic. Piatra-Neamţ), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu T. Ion* (lic. Caracal), *Bassarab C. Alexandru* (lic. Bacău), *Bârs Petru* (lic. Sibiu), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braester Otto* (iic. Naţional, Iaşi), *Bratosin Radu* (lic. Braşov), *Carabeţeanu Gh. Petru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cernes A. M.* (Iaşi), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Ciocoiu Laurentiu* (lic. Braşov), *Cocea Gh. Theodor* (lic. Piteşti), *Cocorandu Dan* (Şc. Mil. de Geniu, Bucureşti), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Cristescu C. Iaan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Diaconu C. Oprea* (lic. milit. Cernăuţi), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dobromirescu Pantelie* (lic. Caracal), *Dudnic V. Atanase* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Dumitrescu Natalia* (Şc. Normală, Bucureşti), *Faibovici I. Henri* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Feldstein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Florescu N.* (lic. Naţional, Iaşi), *Foca Ilie* (Roşiori de Vede), *Franţiu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Fumu N.* (lic. Naţional, Iaşi), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gavrilescu N. I.* (lic. Ploeşti), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu Gheorghe* (lic. Galaţi), *Goldstein Paul* (lic. Naţional, Iaşi), *Grünberg L. M.* (lic. Naţional, Iaşi), *Grünberg Vigder* (lic. Naţional, Iaşi), *Haim F. L.* (lic. Piatra-Neamţ), *Iacob Şt. Eugen* (Botoşani), *Iancu H. David* (lic. Naţional, Iaşi), *Iliuţă I. Ioan Dăbuleni* (lic, Caracal), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Ionescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Bujor Th. C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Gabriel Radu* (lic. Mihai-Viteazu, Bucureşti), *Ionescu Haralambie* (lic. Piteşti), *Ionescu Iuliu* (lic. Giurgiu), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Istinie I. C. Bresuica* (Caracal), *Lateş I. Vasile* (Semin. Pedag., Iaşi), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mocuţă Traian* (lic. Arad), *Munteanu Gheorghe* (lic. Craiova), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nedelceanu Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Ni*

colau I. Dobridor (lic. milit., Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Patron Nicolae* (lic. milit., Iași), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Popescu T. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu I. D-tru* (lic. Internat, Iași), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Tg.-Mureș), *Popovici Th. Theodor* (Șc. Superioară de Comerț, București), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Răpeanu Virgil* (llc. Internat, Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Samoilă D-tru* (Telega), *Scripcă Laur* (Șc. Polit., București), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Sigal Louis* (lic. Național, Iași), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Sofroniuc Dumitrie* și *Vasile* (lic. Cernăuți), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Theodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureș), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Ușacov Dimitrie* (lic. Tighina), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași), *Zamfir D. Ilie* (lic. Caracal), *Zamfirescu Ion* (lic. Fr. Buzești, Craiova) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic Pitești).

PROBLEME PROPUSE

533. — Numărul N împărțit cu altul dă câtul a și restul b. Dacă pe N îl împărțim cu alt număr, dă câtul b și restul a. Să se arate că există două numere α și β prime între ele, așa că N împărțit cu produsul lor să dea un rest divizibil cu suma lor.

EMIL STEFANESCU

534. — Să se construiască un triunghiu A B C, cunoscând lungimea laturei B C, picioarele B_1 și C_1 ale înălțimelor duse din B și C și știind că B C este tangenta unui cerc dat.

V. ALACI

535. — Fie A B C un triunghiu oarecare înscris în cercul O și D, un punct de pe acest cerc. Dreptele C D și A D întâlnesc laturile A B și B C respectiv în punctele M și N, Dreapta B D tae latura A C în F, iar dreapta O F tae dreapta M N în P.

1°. Să se demonstreze că patrulaterul A O C P este inscriptibil.

2°. Cum trebue să fie triunghiul A B C și care trebue să fie poziția punctului D, pentru ca acest patrulater să fie un patrat?

S. M. FELDSTEIN.

536. — Să se verifice identitatea:

$$\frac{1+ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a+b}=\frac{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}}$$

I. DUMITRIU-ARAD

537. — Dacă $n=$mult. $6+1$, atunci polinomul:

$$(x+1)^n-x^n-1,$$

este divizibil cu, $(x^2+x+1)^2$.

I. CRACIUNESCU

538. — Să se stabilească următoarele identități:

1°. $$\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k+1}C_{4p}^{2k-1}=0$$

2°. $$1+\sum_{k=1}^{2k}(-1)^k C_{4p+1}^{2k}=\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+1}^{2k-1}$$

3°. $$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+2}^{2k}=0$$

4°. $$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+3}^{2k}+\sum_{k=1}^{2p+2}(-1)^{k+1}C_{4p+3}^{2k-1}=0$$

GH. CONSTANTINESCU

539. — Să se stabilească relația:

$$\frac{\sin^n(A+B)}{\sin^{2n}C}+\frac{\sin^n(B+C)}{\sin^{2n}A}+\frac{\sin^n(C+A)}{\sin^{2n}B}=\frac{h_a^n+h_b^n+h_c^n}{s^n}R^2,$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

GH GH. VASILIU

Erată. In problema 521, factorul $\frac{1}{abc}$ se va înlocui prin abc, iar termenul $\frac{1}{a^2(a-b)}$ se va înlocui prin $\frac{1}{b^2(a-b)}$.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenții mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL VI. 15 MAI 1926 NO. 3

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N. G. BOTEA. GENERALIZAREA TEOREMEI LUI AUBERT.
2. NOTE MATEMATICE, 5, 6
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 219, 328, 338, 346, 428, 432, 523.
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunil problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — No. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

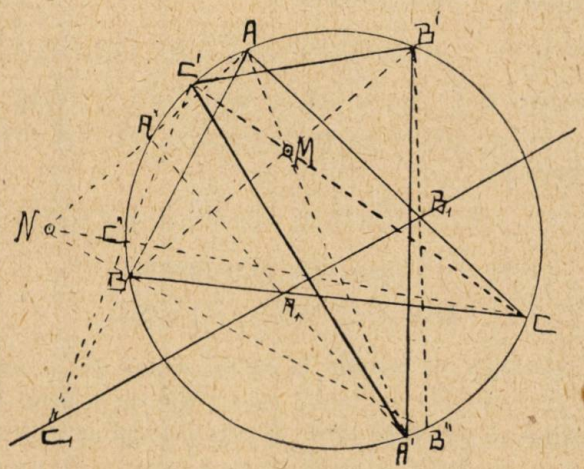
PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12, Timisoara
ADMINISTRATIA: Inginer-Şef, C. TEODORESCU
Directorul Şcoalei Superioare p. t. t. Timisoara

GENERALIZAREA TEOREMEI LUI AUBERT

de N. G. BOTEA
cl. VIII, lic. Cantemir, Bucureşti

I. *Fie o conică* Γ *circumscrisă triunghiului* ABC *şi fie* $A'B'C'$, $A''B''C''$ *două triunghiuri omologice cu* ABC *şi înscrise în* Γ. *Triunghiul format de dreptele* $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ *este omologic cu triunghiul* ABC.



Să luăm pe ABC ca triunghiu fundamental şi să considerăm sistemul de coordonate triliniare în care ecuaţia conicei Γ se scrie:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0.$$

Fie $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ centrul de omologie al triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ iar $N(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ centrul de omologie al triunghiurilor ABC, $A''B''C''$. Se găsesc uşor punctele:

$$A'[\beta_0\gamma_0, -\beta_0(\beta_0+\gamma_0), -\gamma_0(\beta_0+\gamma_0)]$$
$$A''[\beta_1\gamma_1, -\beta_1(\beta_1+\gamma_1), -\gamma_1(\beta_1+\gamma_1)].$$

Dreapta $A'A''$ are ecuaţia:

$$(\beta_0+\gamma_0)(\beta_1+\gamma_1)\alpha+\gamma_0\gamma_1\beta+\beta_0\beta_1\gamma=0.$$

Ea întâlneşte latura BC $(\alpha=0)$ în punctul:

$$A_1(0, \beta_0\beta_1, -\gamma_0\gamma_1).$$

Analog găsim că dreapta $\beta'\beta''$ întâlneşte latura AC în $B_1(-\alpha_0\alpha_1, 0, \gamma_0\gamma_1)$ iar dreptele $C'C''$, AB se întâlnesc în punctul $C_1(\alpha_0\alpha_1, -\beta_0\beta_1, 0)$.

Punctele A_1, B_1, C_1 se găsesc pe dreapta ce are ecuaţia:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_0\beta_1}+\frac{\gamma}{\gamma_0\gamma_1}=0,$$

adică polara trilineară a punctului $P(\alpha_0\alpha_1, \beta_0\beta_1, \gamma_0\gamma_1)$ în triunghiul ABC.

Ţinând seama de reciproca teoremei lui *Desargues*, teorema este demonstrată.

Dacă punctele $A''B''C''$ se confundă cu un acelaş punct N de pe Γ se obţine următoarea cunoscută teoremă a lui *Aubert*. care generalizează teorema lui *Pascal*.

Se consideră două triunghiuri ABC *şi* $A'B'C'$ *omologice şi înscrise într'o conică* Γ *pe care se ia un punct* N. *Dreptele* NA', NB', NC' *întâlnesc laturile lui* ABC *în trei pnncte situate pe o dreaptă ce trece prin centrul de omologie.*

(*T. de Geoemtrie Rouché et Comberousse*, t. II, pag. 455). In adevăr condiţia ca punctul M să fie situat pe dreapta $A_1B_1C_1$ este $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\gamma_1}=0$ care exprimă că punctul N este situat pe Γ.

Când perechile de puncte (A', A''), (B', B''), $(C'C'')$ se apropie foarte mult confundându-se, coardele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ devin tangente conicei. Obţinem astfel teorema:

„Fie ABC *şi* $A'B'C'$ *două triunghiuri omologice şi înscrise în aceiaş conică* Γ, *iar* $A''B''C''$

triunghiul format de tangentele duse prin vârfurile lui A B C *la* Γ. *Triunghiurile* A′B′C′ *și* A″B″C″ *sunt omologice*".

Ca o consecință a acestei teoreme vom demonstra următoarea proprietate:

Fie un exagon A B C D E F *înscris într'un cerc* O. *Dacă dreptele* A D, B E *și* C F *sunt concurente, produsul a trei laturi neconsecutive ale exagonului este egal cu produsul celorlalte trei laturi.*

Fie A_1 punctul de întâlnire al tangentei la cerc în A cu dreapta BF, iar B_1, C_1 respectiv punctele de întâlnire ale tangentelor în C și E cu dreptele B D, D F.

Vom avea:

$$\frac{A_1B}{A_1F}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AF}^2},\quad \frac{B_1B}{B_1D}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{CD}^2},\quad \frac{C_1D}{C_1F}=\frac{\overline{ED}^2}{\overline{EF}^2}.$$

Punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare. Deci teorema lui *Menelaus* ne va da în triunghiul B D F:

$$\frac{A_1F}{A_1B}\cdot\frac{B_1B}{B_1D}\cdot\frac{C_1D}{C_1F}=1.$$

sau ținând seama de egalitățile precedente:

$$\frac{\overline{AF}^2}{\overline{AB}^2}\cdot\frac{\overline{BC}^2}{\overline{CD}^2}\cdot\frac{\overline{ED}^2}{\overline{EF}^2}=1.$$

$$\therefore\ \overline{AB}\,.\,\overline{CD}\,.\,\overline{EF}=\overline{BC}\,.\,\overline{DE}\,.\,\overline{FA}.$$

Această proprietate a exagonului a fost găsită în două cazuri particulare de d-l *C. H. Nicolau* în articolul *„Asupra unor cercuri remarcabile"* din *G. M.*, XXX, pag. 412 și 450.

II. In R. M. T., vol. V, pag. 179, d-l *Col. Gh. Buicliu*, demonstrează pentru cazul cercului următoarea reciprocă a teoremei lui *Aubert.*

Fie A′, B′, C′ *intersecțiile unei transversale* Δ *cu laturile unui triunghiu* A B C *și* M *un punct pe o conică* Γ *circumscrisă lui* A B C. *Dreptele* M A′, M B′, M C′ *îutâlnesc a doua oară pe* Γ *în* A″, B″, C″. *Dreptele* A A″, B B″, C C″ *se întâlnesc într'un punct* P *de pe dreapta* Δ.

Generalizând această teoremă vom demonstra următoarea reciprocă a teoremei pe care am demonstrat'o la începutul acestui articol:

Fie A B C, A′B′C′ *două triunghiuri omologice și înscrise în aceiaș conică* Γ *și fie* A_1, B_1, C_1 *punctele în care laturile lui* A B C *sunt întâlnite de dreaptă* Δ. *Dreptele* A′A_1, B′B_1, C′C_1 *întâlnesc din nou conica în punctele* A″, B″, C″ *astfel că dreptele* A A″, B B″, C C″ *sunt concurente.*

Luând pe ABC ca triunghiu fundamental și considerând sistemul de coordonate trilineare în care ecuația lui Γ este, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\gamma\alpha=0$, și dacă centrul de omologie al celor două triunghiuri este punctul $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ vom găsi ușor punctele:

$$A'[\beta_0\gamma_0,\ -\beta_0(\beta_0+\gamma_0),\ -\gamma_0(\beta_0+\gamma_0)]$$
$$B'[-\alpha_0(\alpha_0+\gamma_0),\ \alpha_0\gamma_0,\ -\gamma_0(\alpha_0+\gamma_0)]$$
$$C'[-\alpha_0(\alpha_0+\beta_0),\ -\beta_0(\alpha_0+\beta_0),\ \alpha_0\beta_0]$$

Dacă ecuația dreptei Δ este: $\frac{\alpha}{\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_1}+\frac{\gamma}{\gamma_1}=0$ coordonatele punctului A_1 sunt $(0, -\beta_1, \gamma_1)$, iar dreapta A′A_1 are ecuația:

$$(\beta_0\gamma_1+\beta_1\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)\alpha+\beta_0\gamma_0\gamma_1\beta+\beta_0\gamma_0\beta_1\gamma=0.$$

Această dreaptă întâlnește pe Γ în afară de punctul A′ în punctul:

$$A''[\beta_0\gamma_0\beta_1\gamma_1, -\beta_1\gamma_0(\beta_0\gamma_1+\gamma_0\beta_1), -\beta_0\gamma_1(\beta_0\gamma_1+\gamma_0\beta_1)],$$

dreapta A A″ are ecuația: $\beta_0\gamma_1\beta-\gamma_0\beta_1\gamma=0$.

Analog găsim pentru cevienele B B″ și C C″ ecuațiile:

$$\gamma_0\alpha_1\gamma-\alpha_0\gamma_1\alpha=0,\quad \alpha_0\beta_1\alpha-\beta_0\alpha_1\beta=0.$$

Aceste trei drepte trec prin punctul:

$$N[\alpha_1\beta_0\gamma_0,\ \beta_1\gamma_0\alpha_0,\ \gamma_1\alpha_0\beta_0].$$

Condiția ca punctul N să fie situat pe Δ este $\alpha_0\beta_0+\beta_0\gamma_0+\gamma_0\alpha_0=0$, care arată că punctul M trebue să fie situat pe Γ și deci triunghiul A′B′C′ se reduce la punctul M. Este tocmai cazul particular al d-lui *Col. Gh. Buicliu.*

Condiția ca punctul N să fie situat pe Γ este:

$$\alpha_0\beta_1\gamma_1+\beta_0\gamma_1\alpha_1+\gamma_0\alpha_1\beta_1=0,$$

care arată că punctul M trebue să fie situat pe Δ.

Se vede de aci că teorema stabilită mai sus cuprinde atât problema d-lui *Col. Gh. Buicliu*, cât și problema 615 din G. M. a d-lui *G. Țițeica* citată d-l *Col. Gh. Buicliu* ca reciprocă a teoremei d-sale.

Un caz particular al teoremei de mai sus este următoarea propoziție a d-lui *I. C. Vasiliu:*

„Paralelele duse printr'un punct M *al conicei* Γ *având în coordonate baricentrice ecuația:*

$$\alpha_0(\beta_0+\gamma_0)\beta\gamma+\beta_0(\gamma_0+\alpha_0)\gamma\alpha+\gamma_0(\alpha_0+\beta_0)\alpha\beta=0$$

la cevienele punctului de coordonate $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, *întâlnesc laturile triunghiului fundamental respectiv în trei puncte colineare.* (Curierul Matematic, vol. I, pag. 81).

Aceasta se poate deduce ușor din teorema generală în același mod în care d-l *Col Gh. Buicliu* a dedus teorema lui *Simson.*

Transformând prin metoda polarelor reciproce prima teoremă obținem:

Fie o conică Γ *înscrisă în triunghiul* ABC *și două triunghiuri* A′B′C′, A″B″C″ *omologice cu* ABC *și circumscrise conicei.*

Fie punctele A_1 (B′C′, B″C″), B_1 (C′A′, C″A″), C_1 (A′B′, A″B″). *Dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.*

Și reciproca:

Fie ABC *și* A′B′C′ *două triunghiuri omologice și circumscrise aceleiași conice* Γ *și fie un punct* M *în planul lor, iar* A_1, B_1, C_1 *respectiv punctele de întâlnire ale dreptelor* AM, BM, CM *cu laturile triunghiului* A′B′C′. *Tangentele duse prin* A_1, B_1, C_1 *la* Γ *întâlnesc laturile triunghiu-* ABC *respectiv în trei puncte colineare.*

NOTE MATEMATICE

5. — *Problema 420*, a cărei soluție s'a publicat la pagina 26, se poate rezolva și în felul următor: Fie N numărul de 2 cifre din stânga pătratului cerut. Conform enunțului trebue avut.

$$N\times 10000+2N\times 100+6N=K^2,$$

$$\therefore\quad 10206\times N=K^2$$

$$\therefore\quad 2\times 3^6\times 7\times N=K^2$$

De aci urmează că N trebue să fie de forma:

$$9<N=2^{2n+1}\times 3^{2q}\times 7^{2n+1}\times M^2<100$$

$$\therefore\quad 9<N=14\times 2^{2n}\times 3^{2q}\times M^2<100$$

$$\therefore\quad 3<\sqrt{N}=2^n\times 3^q\times M\times\sqrt{14}<10.$$

Avem însă $2\times\sqrt{14}<10$ iar $3\times\sqrt{14}>10$ deci se poate lua cel mult $n=1$, $q=0$, $M=1$ sau $n=0$, $q=0$, $M=1$.

Din aceste sisteme de valori numai ultimul dă soluția $N=14$ și $K^2=142884=378^2$.

COL. GH. BUICLIU

6. — *Asupra notei 9 din R. M. T., V, p. 84—5.* In această notă d-l *V. Alaci* demonstrează următoarea identitate:

$$p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}+\ldots+(-1)^n C_p^n(p-2n)^{p-2k}=0$$

unde: n este egal respectiv cu $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p}{2}-1$ după cum p e impar sau par, k fiind un număr cuprins între 1 și $\frac{p}{2}$, adică: $1\leqq k<\frac{p}{2}$.

In acest scop d-sa pornește dela desvoltările cunoscute:

$$(1)\quad \sin^p t=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\left[\sin p\,t-C_p^1\sin(p-2)t+\right.$$

$$\left.C_p^2\sin(p-4)t+\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{\frac{p-1}{2}}\sin t\right]\quad (p\ \text{impar})$$

$$(2)\quad \sin^p t=\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}}\left[\cos p\,t-C_p^1\cos(p-2)t+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{p}{2}-1}C_p^{\frac{p}{2}-1}\cos 2t+(-1)^{\frac{p}{2}}C_p^{\frac{p}{2}}\right],$$

apoi derivează pe rând de $(p-2k)$ ori, obținând:

$$(1^0)\quad D^{p-2k}\sin^p t=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\left\{p^{p-2k}\sin\left[pt+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$-C_p^1(p-2)^{p-2k}\sin\left[(p-2)t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]+\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{p-2}{2}}C_p^{\frac{p-2}{2}}\sin\left[t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right.\cdot$$

Pentru $t=0$ se obține:

$$\left|D^{p-2k}\sin^p t\right|_{t=0}=\frac{(-1)^{p-k-1}}{2^{p-1}}\left[p^{p-2k}-\right.$$

$$\left.C_p^1(p-2)^{p-2k}+\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{\frac{p-1}{2}}\right].$$

Procedând analog cu (2) avem:

$$|D^{p-2k}\sin^p t|_{t=0} = \frac{(-1)^{p-k}}{2^{p-1}}\Big[p^{p-2k} - C_p^1(p-2)^{p-2k} + \ldots + (-1)^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\frac{p}{2}-1} 2^{p-2k}\Big].$$

Observ că dacă am face $k=0$, am obține o altă identitate.

In adevăr, avem :

$$D^1 \sin^p t = p \sin^{p-1} t \cos t$$

$$D^2 \sin^p t = p(p-1)\sin^{p-2} t \cos t - p \sin^p t$$

. . . . . .

$$D^p \sin^p t = p! \cos^{p-1} t + p \sin t.$$

De unde rezultă identitatea :

$$p! = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{p-1}}\left[p^p - C_p^1(p-2)^p + C_p^2(p-4)^p + \ldots + (-1)^n C_p^n (p-2n)^p\right],$$

unde n ia valorile $\frac{p-1}{2}$ sau $\frac{p}{2}-1$ după cum p e impar sau par. Această identitate voiam să o evidențiez.

NESTOR D.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 8, Aprilie 1926. Condițiuni de divizibilitate în cazul unei baze de numerotație oarecare, de *Col. C. Felix*. Asupra unor clase de ecuațiuni, având cel mult o rădăcină reală, de *A. Angelescu*. Proprietăți ale curbelor plane, de *Miron Niculescu*.

2. *Revista Matematică Bârlădeană*. anul I, No. 4, Aprilie 1926. Chestiuni sugestive de geometria triunghiului de *M. Grünbaum*.

3. *Curierul Matematic* (litografiat), vol. II, No. 3, Mai 1926. Asupra ortopolului, de *Slt. M. Focşeneanu*. Chestiuni de examinat, de *M. Grünbaum*.

4. *Revista de Ciencias*, anul XXVII, N-rile 1 — 4. Decano de la Facultad de Ciencias, *Redacția*. Teoria potencial Newtoniano, de *Dr. Godofredo Garcia*. Movimiento relativo de un punto material de *Dr. Emilio Solórzano*. *Dr. Enrique Guzman Valle*, de *F. C.* El movimiento de un cuerpo lanzado oblicuamente en la mecanica relativa, de *Godofredo Garcia*. De los manuscritos del Dr. *Baranca*, de *Dr. Caranza*. Conferencias sobre mecanica relativista, de *Dr. Godofredo Garcia*. Geometria analitica de dos dimensiones, de Dr. *Eulogio Saldias*. Fallecimiento del doctor *Federico Villareol*. Delegado al Congreso Cientifico Pan Americano. Geometria analitica de dos dimensiones, de *Dr. Eulogio S. Saldias*.

PROBLEME REZOLVATE*)

219. — *Notațiile fiind cele obicinuite relativ la un triunghiu oarecare, se cere a se demonstra relațiunea :*

$$p = a \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} + c\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

C. ROIBANESCU.

Adunăm relațiile cunoscute într'un triunghiu :

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

și obținem :

$$2p = a(\cos B + \cos C) + b(\cos A + \cos C) + c(\cos A + \cos B).$$

Transformând sumele de cosinusuri în produse, avem :

$$(1)\qquad 2p = 2a\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 2b\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{C-A}{2} + 2c\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

Simplificând cu 2 și observând că :

$$\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2},\quad \cos\frac{A+C}{2} = \sin\frac{B}{2},\quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2},$$

fiindcă, $A+B+C = 180^0$, (1) devine :

$$p = a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} + c\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

adică tocmai relația cerută.

Erată. In problema 427, formula folosită : (1) $\mathrm{sh}^2\beta - \mathrm{ch}^2\beta = 1$, care e greșită, se va înlocui prin $\mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{sh}^2\beta = 1$, adică se va înlocui pretutindeni $\mathrm{sh}\beta$, prin $\mathrm{ch}\beta$ și invers.

Observare. Dacă totuși folosind relația greșită (1) identitatea a putut fi stabilită, asta se datorește numai faptului ce identitatea dată este simetrică în $\mathrm{sh}\beta$ și $\mathrm{ch}\beta$.

Soluţii date de d-nii: *Adam Mircea* (Constanţa), *Alexandrescu Nicolae* (Ploeşti), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Băleanu G.* (lic. Timişoara), *Bârglăzan A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Berdan C.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Bobârnac C. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Brătescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Ciorănescu I. C.* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Şc. Polit., Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Polit., Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Coşniţă Virgil* (lic. Bârlad), *Cotea Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Creţoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *David Gheorghe* (lic. Timişoara), *Dângă S. Vlad* (lic. Orheiu), *Dimitrescu Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dragomirescu Ionel* (lic, R.-Sărat), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val.*, *Giotta Vincenţiu* (lic. Bârlad), *Gogălniceanu M. Mihail* (lic Brăila), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Grigore Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Gradiny I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşoreanu I. George* (lic. Arad), *Hornagea Iorguţă* (lic. Huşi), *Iacob Şt. Eugen* (lic. Botoşani), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Ionescu I. Nicolae* (lic. Piteşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iordache N. Ion* (student), *Katz Pincu* (lic. Galaţi), *Lăzărescu I. Şt.* (Giurgiu), *Lelescu Luciliu* (lic. M-rea Dealu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manoil Adolf* (Roman), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mihăescu Şt. Nicolae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Muşta Ştefan* (student, Cluj), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Oprişanu G. Ernest* (student), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Petrulian Şt. N.* (lic. Ploeşti), *Popea G. Ovidiu* (lic. Chişinău). *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Th. Ion* (student), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Râmniceanu L. R.* (lic. Tg.-Jiu), *Rigani Gr.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Şeptelici Raul* (Şc. milit. de Artilerie), *Silion Ion* (lic. Braşov), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti), *Stambuleanu Adrian* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu A. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Ştefănescu Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (Şc. Polit., Bucureşti), *Terfeleag Olga* (Şc. Normală, Caransebeş). *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Urzică Aurel* (lic. Deva), *Vasilescu Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Weiss Leon* (lic. Galaţi) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

328. — *Să se găsească un număr de patru cifre, astfel ca numărul format de primele două cifre şi numărul format de ultimele două cifre să fie numere prime, iar răsturnatul său să formeze un număr, astfel ca numărul format din primele două cifre, cât şi numărul format de ultime două cifre să fie numere consecutive.*

GH. DIACONU.

Scrim întâi numerile prime de două cifre, care sunt:

11, 13, 17, 19, 23, 29. 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 şi 97.

Acum formăm numere de câte patru cifre scriind câte două grupe una după alta, dar numai pe acelea care au aceiaşi cifră a unimilor şi a căror cifră a zecilor sunt consecutive, — adică acele grupe care diferă cu 10 — căci numai acestea inversate ne dau numere consecutive.

Avem în aceste condiţii numerile:

1323, 1929, 3141, 3747, 4353, 6171, 7383, 7989 şi

2313, 2919, 4131, 4737, 5343, 7161, 8373, 8979,

care satisfac enunţul. Putem lua încă ca soluţii numerile 1101, 1303, 1707. Avem în total 19 soluţii.

Soluţii date de d-nii: *Alter Cogan* (lic. Chişinău), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoşani), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Basarab Alexandru* (lic. Bacău), *Bărbulescu Gh.* (lic. Tg.-Mureş), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braieşter I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Băileanu I. Marin* (lic. Caracal), *Cantacuzino I.* (lic. M-rea Dealu), *Caracaş Gh.* (lic. Botoşani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Chiru Nanov* (lic. Internat, Iaşi), *Cligher A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Craiova), *Constantinescu Mihail* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorgke* (Tg.-Jiu), *David Gheorghe*, *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconescu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dinu M. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dragomir Ch. Eugeniu* (lic. Tg.-Mureş), *Dugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal), *Flickstein J.* (student, Cernăuţi), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Gavrilescu N. Ioan* (lic. Ploeşti), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Golcea Cornel* (student), *Goldstein N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigore Nicolae* (Învăţător, Ialomiţa), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grozăvescu D-tru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grozăvescu Gr. Petre* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Hart Lazăr* (lic. Galaţi), *Herşcovici Emanoil* (Galaţi), *Huzuneanu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Iacob Şt. Eugen* (Botoşani), *Iliescu Şt. Dima* (lic. Tg.-Mureş), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Iliuţă I. Dăbuleni* (lic. Caracal), *Iliuţă I. Ion* (lic. Caracal), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova),

Istinie I. C-tin (lic. Caracal), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz L.* (Botoşani), *Kertesz Paul*, *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Lepădatu I. Victor* (iic. Internat, Iaşi), *Lindenberg Lyonel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Marinescu S. D*, (Ploeşti), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu) *Mihăilescu St. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Moroianu I. At.* (Constanţa), *Neacşu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nedelcu C-tin* (lic. Braşov), *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Nicolescu P. Ionel* (lic. Roman), *Nicolescu P. Vasile* (lic. Tg.-Mureş), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Oană Ioan* (lic. Făgăraş), *Olariu T. Enea* (Şc. Polit. Timişoara), *Oprescu I. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea V* (student), *Petreanu M. Petre* (Caracal), *Petrescu N. D-tru* (Bucureşti), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popp Emilian* (lic, M-rea Dealu), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Andrei* (lic. Făgăraş), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu I. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Ep.* (lic. Galaţi), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popescu Spirea* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (student), *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Predescu I. Nicolae* (lic. Caracal), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Schächter M. Ozias* (Galaţi), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag. Iaşi), *Scripcă Valentin* (Giurgiu), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Silistrărianu C.* (Ploeşti), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Stamatiu I. Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iaşi), *Şuşelescu N. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ulea C. Titus*, *Vasiliu Gh.* (lic. Timişoara), *Vasiliu C. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău), *Wagner I.* (lic. Craiova) şi *Zamifrescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova).

338. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, astfel ca prima cifră să fie egala cu suma ultimelor două, a doua cifră să fie egală cu cifra întâia mărită cu a patra, iar prima cifră să fie divizor al numărului format de suma cifrelor patratului.*

SABIN VLADUTU.

Fie $abcde$ patratul căutat. Conform enunţului avem:

$$(1) \qquad a = d + e, \quad (2) \quad b = a + d,$$

$$(3) \qquad a + b + c + d + e = \text{mult. } a.$$

Din (1) şi (2) deducem:

$$(4) \qquad b = 2d + e.$$

Şiim apoi că patratele perfecte se termină cu: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, şi pentru de vom lua din aceste grupe numai pe acelea în care, $2d + e \leq 9$, restricţie impusă de relaţia (4), de poate fi deci:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 41.

Cu aceste grupe putem forma numerile $abcde$, ţinând seamă de condiţiile (1) şi (2), şi avem:

(1) $11\,c\,01$, $44\,c\,04$, $99\,c\,09$, $78\,c\,16$, $35\,c\,21$, $68\,c\,25$, $59\,c\,41$.

Oricare ar fi cifra c, numărul $11\,c\,01$, n'ar putea fi patrat perfect, căci rădăcina lui patrată n'ar putea fi de cât 101 sau 109, ale căror patrate sunt 10201 şi 11881.

Pentru numerile rămase în (1), cifra c o determină astfel ca şi condiţia (3) să fie satisfăcută, astfel găsim uşor numerile:

44004, 44404, 44804, 99009, 99909, 78616, 35121, 35421, 35721, 68424, 79525, 59141, 59641.

Să vedem care dintre acestea sunt patrate perfecte.

Numerile 44004, 35121, 35421, 68424 nu pot fi patrate perfecte fiind divizibile cu 3, fără a fi cu 9. Din numerile rămase găsim că numai 35721 este patrat perfect:

$$35721 = 189^2,$$

care e singura soluţie a problemei:

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Bivolaru C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braieşter I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi). *Cantacuzino I.*, *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Ciorănescu I. C-tin* (M-rea Dealu), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Diaconescu V. Theodor* (lic. Caracal), *Diaconu Gh.* (Amărăşti), *Dină N.* (lic. Caracal), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal),

Dumitrescu A. Mişu (lic. Roman), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Golopenţia Antoniu* (lic. Timişoara), *Grofşorean I. Gheorghe Iacob St. Eugen* (lic. Botoşani), *Iliescu Şt. Dină* (lic. Tg.-Mureş), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Iliuţă Dăbuleni* (lic. Caracal, *Iliuţă. I. Ion* (Caracal), *Ionescu Th. Aadrei-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Istinie I. C-tin* (lic.. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu St. Nicolae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Moroianu I. A.* (Constanţa), *Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Giurgiu), *Nicolaescu P. Ionel* (lic. Roman), *Nicolau G. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Percea Viorel* (student), *Petrescu St. Alex.-Dan* (lic. Milit., Craiova), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu I. Ep.* (lic. Galaţi), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popescu Spirea* (lic, M-rea Dealu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Th. Ioan* (student), *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rădulescu Niculae* (lie. Caracal), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Schächter Arie* (Galaţi), *Schächter M. Ozias* (Galaţi), *Scripcă M. Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Şcrban I. Tiberiu* (lic. Zărneşti), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stamatiu I. Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Stamatiu I. Valeriu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iaşi), *Surugiu V.* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodoru C. C.* (lic. Tg.-Mureş), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău) şi *Wagner W.* (lic. Craiova).

346. — *Să se găsească patru numere consecutive divizibile, primul cu 7, al doilea cu 9, al treilea cu 11 şi ultimul cu 17.*

N. TEODORESCU

Vom cerceta două cazuri:

1. *Numerele consecutive cerute sunt crescătoare.* Dacă x e primul număr, putem scri:

(1) $x=7p,\ x+1=9q,\ x+2=11r,\ x+3=17s,$

p, q, r, s fiind numere întregi. Eliminând x între relaţiile (1) găsim:

(2) $7p-9q=-1,\ 9q-11r=-1,\ 11r-17s=-1.$

Soluţionăm fiecare ecuaţie în parte cu cunoştinţele analizei nedeterminate. E uşor a găsi că prima ecuaţie din (2) e satisfăcută în numere întregi pozitive luând $p=5$, $q=4$, soluţia ei generală ştim că este:

(3) $p=5+9m,\ q=4+7m,$ m un întreg oarecare.

In acelaş mod găsim pentru ecuaţia 2-a şi a 3-a din (2) respectiv soluţiile:

(4) $q=6+11n,\ r=5+9n$

(5) $r=3+17k,\ s=2+11k,$

n şi k fiind întregi oarecare.

Din relaţiile (3), (4) şi (5) rezultă pentru q şi r câte două valori pe care egalându-le obţinem ecuaţiile:

(6) $7m-11n=2,\ 9n-17k=-2,$

pe care rezolvindu-le în numere întregi, găsim respectiv:

(7) $m=5+11a,\ n=3+7a$

(8) $n=13+17l,\ k=7+9l,$

a şi l fiind întregi oarecare, Egalând valorile lui n, găsim ecuaţia:

$$7a-17l=10,$$

a cărei soluţie generală este:

$$\left.\begin{aligned} a&=16+17b\\ l&=6+7b,\end{aligned}\right\}\quad (b \text{ întreg}).$$

Inlocuind acum valorile lui a şi l în relaţiile (7) şi (8), apoi valorile lui m, n, k în relaţiile (3), (4) şi (5) găsim:

$$p=5+9[5+11(16+17b)]=1634+1683b$$
$$q=4+7[5+11(16+17b)]=1271+1309b$$
$$r=5+9[3+7(16+17b)]=1040+1071b$$
$$s=2+11(7+9(6+7b)]=673+693b$$

Inlocuind aceste valori ale lui p, q, r, s în relaţiile (1) găsim că numerile cerute sunt de forma:

$$x=11438+11781b$$
$$x+1=11439+11781b$$
$$x+2=11440+11781b$$
$$x+3=11441+11781b.$$

Cele mai mici numere căutate b, le obținem luând $b=0$ și avem:

11438, 11439, 11440, 11441.

2. *Numerile cerute sunt descrescătoare.* Dacă x e primul număr, putem scri:

(1) $x=7p,\ x-1=9q,\ x-2=11r,\ x-3=17s,$

p, q, r, s fiind întregi. Eliminând pe x, avem:

(2) $7p-9q=1,\ 9q-11r=1,\ 11r-17s=1.$

Soluțiile acestor ecuații în numere întregi, sunt:

(3) $p=4+9m,\ q=3+7m$

(4) $q=5+11n,\ r=4+9n$

(5) $r=14+17k,\ s=9+11k.$

Din relațiile (3), (4) și (5) rezultă pentru q și r două valori, pe care egalându-le, găsim:

(6) $7m-11n=2,\ 9n-17k=10,$

ale căror soluții în numere întregi sunt respectiv:

(7) $m=5+11a,\ n=3+7a$

(8) $n=3+17l,\ k=1+9l.$

Egalând valorile lui n găsim:

$$7a-17l=0,$$

a cărei soluție generală în numere întregi este:

$$a=17b,\ l=7b.$$

Inlocuind acum valorile lui a și l în (7) și (8), apoi valorile lui m, n, k în relațiile (3), (4) și (5), găsim:

$$p=4+9(5+187b)=49+1683b$$
$$q=3+7(5+187b)=38+1309b$$
$$r=4+9(3+119b)=31+1071b$$
$$s=9+11(1+63b)=20+693b.$$

Inlocuind aceste valori ale lui p, q, r, s în relațiile (1), găsim că numerile cerute sunt de forma:

$$x=343+11781b$$
$$x-1=342+11781b$$
$$x-2=341+11781b$$
$$x-3=340+11781b$$

Cele mai mici numere căutate le obținem luând $b=0$ și avem:

343, 342, 341, 340.

Soluțiuni parțiale date de d-nii: *Braieșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Goldstein N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Paszko Wilhelm* (București), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ioan*, *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Schächter M. Ozias* (lic. Galați), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stoicescu T. Theodor* (lic. Internat, Iași), *Stroescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș). *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) și *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău).

428. — *Există o infinitate de triunghiuri în care are loc relația:*

$$2\sin A\sin B=\cos C.$$

1°. *Ce condițiune trebue să îndeplinească acele triunghiuri?*

2°. *Să se rezolve un astfel de triunghiu, cunoscând două laturi.*

ION PROTOPOPESCU

Intr'un triunghiu A B C, știm că:

$$A+B+C=180^\circ,$$

de unde rezultă:

$$C=180^\circ-(A+B)$$

și deci:

(1) $$\cos C=-\cos(A+B).$$

Relația dată în virtutea relației (1), devine:

$$2\sin A\sin B=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\therefore\ \cos A\cos B+\sin A\sin B=0$$

sau,

$$\cos(A-B)=0$$

(2) $$\therefore\ A-B=90^\circ.$$

Triunghiurile A B C cerute, trebue să fie astfel ca diferența între unghiurile A și B să fie de 90°.

Să rezolvăm acum aceste triunghiuri. Vom considera trei cazuri, după cum laturile date sunt $a, b;\ a, c;\ b, c.$

1°. Avem date laturile a, b și $A-B=90^\circ$.

Din relația cunoscută:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

deducem în virtutea relației (2):

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b},$$

deci putem calcula unghiul C, apoi relațiile:

$$A-B=90^0,\quad A+B=180^0-C,$$

ne dau:

$$\hat{A}=135-\frac{C}{2},\quad B=45^0-\frac{C}{2},$$

avem astfel aflate și unghiurile A și B. Latura c, este dată de relația:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Triunghiul A B C este astfel rezolvat.

2°. Avem dat a, c și $A-B=90^0$.

Fiindcă $A+B=180^0-C$, deducem ca mai sus:

$$(4)\qquad A=135^0-\frac{C}{2},\quad B=45^0-\frac{C}{2},$$

adică avem unghiurile A și B în funcție de C.

Folosim acum relația:

$$(5)\qquad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

și fiindcă din (4) deducem:

$$\sin A=\sin\left(135-\frac{C}{2}\right)=\cos\left(\frac{C}{2}-45\right)$$

relația (5) devine:

$$\frac{a}{\cos\left(\frac{C}{2}-45^0\right)}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2a}{\cos\left(\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{2a^3}{1+\sin C},$$

sau: $2a^2.\sin^2 C-c^2.\sin C-c^2=0.$

Avem o ecuație de gradul al 2-lea în $\sin C$, putem afla deci unghiul C numai dacă $-1\leq \sin C\leq 1$.

Unghiul C fiind aflat, relațiile (4) ne dau unghiurile A și B, iar latura b ne este dată de relația:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}.$$

3°. Avem dat b, c și $A-B=90^0$.

Fiindcă,

$$A+B=180^0-C,$$

deducem și în acest caz:

$$(5)\qquad A=135^0-\frac{C}{2},\quad B=45^0-\frac{C}{2}.$$

Folosim acum relația:

$$(6)\qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

și fiindcă din (5) deducem:

$$\sin B=\sin\left(45^0-\frac{C}{2}\right),$$

relația (6) devine:

$$\frac{b}{\sin\left(45^0-\frac{C}{2}\right)}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2b}{\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{2b^2}{1-\sin C}$$

sau:

$$2b^2\sin^2 C+c^2\sin C-c^2=0.$$

Avem o ecnație de gradul al 2-lea în $\sin C$, putem afla deci unghiul C, numai dacă, $-1\leq \sin C\leq 1$.

Relațiile (5) ne permit a afla unghiurile A și B, dacă unghiul C ar fi aflat. Latura a care a rămas este dată de relația:

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}.$$

Triunghiul este deci rezolvat și în acest caz.

Observare. Primul caz se mai poate rezolva și altfel: Din faptul că, $A-B=90^0$, deducem:

$$\sin A=\cos B,$$

și atunci relația cunoscută:;

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

devine;

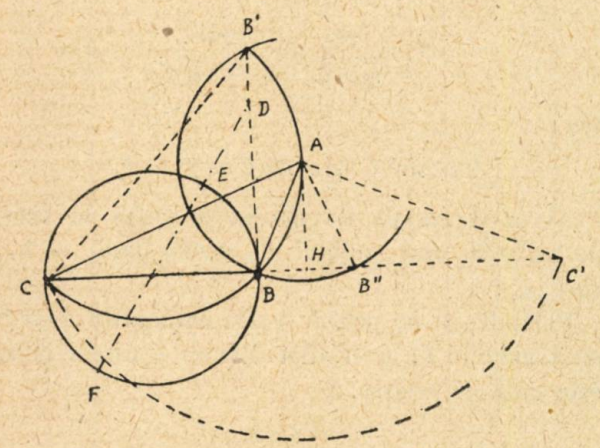
$$\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} B=\frac{b}{a},$$

relații care ne permite a afla unghiul B, celelalte elemente sunt acum ușor de aflat.

Soluții date de d-nii: *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beju Traian* (Arad), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Braeșter O.* (lic. Național, Iași), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Manole Gheorghe* (lic. Brașov), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popovici Aurel* (Focșani), *Popovici Th. Ioan, Pușcă T. Toma* (lic. Internat, Iași), *Răpeanu A. Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rătan F.* (lic. Brașov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Serghei Ern* (Șc. P. T. T. Timișoara), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași).

Construcția geometrică a triunghiului. 1°. Se dă $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{2}$, $b=AC$ și $c=AB$. Presupunem problema rezolvată și fie ABC triunghiul cerut.



In B ridicăm perpendiculara BB' pe AB. Din enunț rezultă:

$$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{B'BA}=\gamma \text{ și } \overset{\frown}{BAC}=\frac{\pi}{2}-2\gamma.$$

Din A coborâm perpendiculara AH pe BC. Luăm pe CH punctul B'' simetric lui B în raport cu H adică $BH=B''H$. AH fiind perpendiculară, pe BB'' rezultă $AB=AB''$. Triunghiul ABB'' este isoscel, deci înălțimea AH este și bisectoare, deci $\overset{\frown}{BAH}=\overset{\frown}{HAB''}$. Și cum AH este paralelă cu BB' — ambele perpendiculare pe BC — rezultă:

$$\overset{\frown}{BAH}=\overset{\frown}{HAB''}=\overset{\frown}{B'BA}=\gamma.$$

Atunci:

$$\overset{\frown}{CAB''}=\overset{\frown}{CAB}+\overset{\frown}{BAH}+\overset{\frown}{HAB''}=$$
$$\frac{\pi}{2}-2\gamma+\gamma+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Dreapta AB'' este perpendiculară pe AC și cum $AB''=AB$ rezultă construcția: Pe dreapta AC de mărimea dată b se ridică în A o perpendiculară AB'' egală cu c. Unim B'' cu C și din A ca centru cu c ca rază descrim arcul de cerc care tae pe $B''C$ în B. ABC este triunghiul cerut.

Observare. Se observă că:

$$\overset{\frown}{BAB''}=2\gamma=\overset{\frown}{B'BA}+\overset{\frown}{BB'A}=\gamma+\overset{\frown}{BB'A}.$$

Rezultă $BB'A=\gamma$ adică $AB'=AB$. De unde construcția. In extremitatea A a lui $CA=b$ ridicăm perpendiculara $AB'=c$; pe CB' ca diametru descrim un cerc $CBAB'$. Din A cu raza $AB=c$ trasăm arcul de cerc care tae primul cerc in B. ABC e triunghiul cerut. Această construcție cere operații de trasare mai multe ca prima.

2°. Se dă $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{2}$, $a=BC$ și $c=AB$.

Dreapta CA fiind perpendiculară pe mijlocul lui $B'B''$ triunghiul $B'CB''$ e isoscel, înălțimea CA e și bisectoare deci unghiul $\overset{\frown}{B'CB''}=2\gamma=\overset{\frown}{BAB''}$. Din asemănarea triunghiurilor $B'CB''$ și BAB'' deducem.

$$\frac{BB''}{B'B''}=\frac{AB}{CB''} \quad \therefore BB''.CB''=2\overline{AB}^2=2c^2 \text{ căci}$$
$B'B''=2AB$. Insă $CB''-BB''=CB=a$.

Cunoscând diferența și produsul segmentelor CB'' și BB'' le putem construi. Cunoscând punctul B'', cu două arce de cerc de rază $c=AB$ și cu centrele respectiv în B și B'' determinăm punctul A.

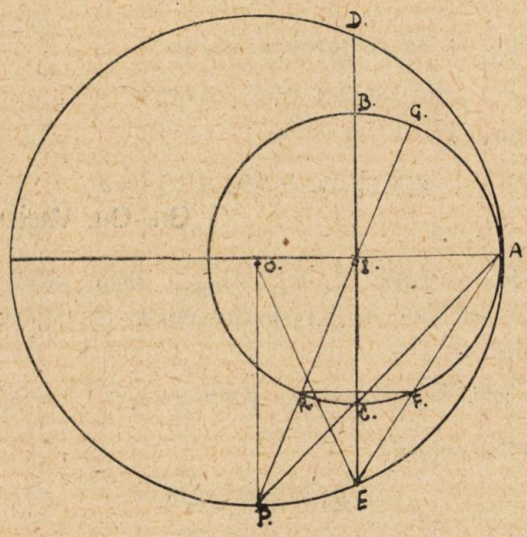
Construcția geometrică se face în felul următor: Pe dreapta $CB=a$ ridicăm în B perpendiculara BB' pe care luăm $BD=AB\sqrt{2}$, adică ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catete egale între ele și egale cu $AB=c$. Pe CB ca diametru descrim un cerc; unim D cu centrul cercului — mijlocul lui CB — și fie E și F punctele unde această secantă tae cercul $DE=BB''$, $DF=CB''$. Luăm pe CB un segment $CB''=DF$. Din B'' astfel de-

terminat și din B ca centru cu o rază $AB = c$ descrim două arce care se tae în A. ABC e triunghiul cerut.

3°. Cazul când se dă $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ a și b se rezolvă analog luând însă simetricul C′ al lui C în raport cu H. I. P.

432. — *Se dă un cerc* I *tangent interior unui cerc* O, *în punctul* A. *Prin* I *se duce un diametru perpendicular pe diametru comun și care tae cercul* I *în* B *și* C, *iar cercul* O *în* D *și* E. *Dreapta* AE *tae cercul* I *în* F, *dreapta* AC *tae cercul* O *în* P. PI *tae cercul* I *în* R *și* G. *Să se arate că* FR *este paralelă cu diametrul comun.*

IONESCU-TH. ANDREI BUJOR.



Soluție dată de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. milit., Iași), *Sfințescu Duiliu* (lic. Lazăr, București) și *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București).

Vom demonstra că FR nu poate fi paralelă cu diametru comun OI, adică contrar de ce cere problema. In adevăr, presupunând FR ∥ OI ar rezulta:

$$\text{arc}\,RD = \text{arc}\,CF,$$

(CI fiind perpendicular pe OI, ar fi și pe RF), și deci am avea:

$$(1) \qquad \sphericalangle RIC = 2 \sphericalangle CAF,$$

observând măsurile lor în cercul I. Unind apoi O cu P și E, am avea încă:

$$(2) \qquad \sphericalangle POE = 2 \sphericalangle PAE = 2 \sphericalangle CAF,$$

observând măsurile lor în cercul O.

Din (1) și (2) ar rezulta:

$$\sphericalangle POE = \sphericalangle RIC = \sphericalangle PIE,$$

ceia ce nu-i posibil, $\sphericalangle POE$ fiind la centru, iar $\sphericalangle PIE$ având vârful în interiorul cercului O. Presupunerea că FR ∥ OI conducându-ne la un rezultat imposibil, conchidem că FR nu-i paralelă cu OI.

Observare. In afară de cele 3 soluții bune, menționate, s'au primit încă 81 de soluții, presărate de greșeli de multe feluri, greșeli ce ar trebui să îngrijească pe autorii lor și să-i îndemne să-și controleze cu mai multă rigurozitate șirul de raționamente.

523. — *Știind că ecuația:*

$$x^3 + (p-3)x^2 + 2qx + 2(1-q) = 0,$$

are ca rădăcini $sec^2 A$, $sec^2 B$, $sec^2 C$, *să se formeze ecuația care admite ca rădăcini,* $tg^2 A$, $tg^2 B$, $tg^2 C$.

VASILE C. GABRIELESCU

Relațiile cunoscute dintre rădăcinele și coeficienții unei ecuații, ne permit a scrie:

$$(1) \qquad \Sigma \sec^2 A = 3 - p, \quad \Sigma \sec^2 A \sec^2 B = 2q,$$
$$\sec^2 A \sec^2 B \sec^2 C = 2(q-1).$$

Pe de altă parte putem scri evindent ținând seama și de relațiile (1):

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma tg^2 A = \Sigma(\sec^2 A - 1) = \Sigma \sec^2 A - 3 = -p \\ \Sigma tg^2 A\, tg^2 B = \Sigma(\sec^2 A - 1)(\sec^2 B - 1) = \\ \qquad \Sigma \sec^2 A \sec^2 B - 2\Sigma \sec^2 A + 3 = \\ \qquad 2q - 6 + 2p + 3 = 2p + 2q - 3 \\ tg^2 A\, tg^2 B\, tg^2 C = (\sec^2 A - 1)(\sec^2 - 1)(\sec^2 C - 1) \\ \qquad = \sec^2 A \sec^2 B \sec^2 C - \Sigma \sec^2 A \sec^2 B + \\ \Sigma \sec^2 A - 1 = 2q - 2 - 2q + 3 - p - 1 = -p \end{cases}$$

$tg^2 A$, $tg^2 B$, $tg^2 C$, fiind rădăcinele unei ecuații, și relațiile (3) scriind suma, suma produselor câte două si produsul lor, ușor putem scri această ecuație, ea este:

$$x^3 + px^2 + (2p + 2q - 3)x - p = 0,$$

tocmai ecuația cerută.

Soluții date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Militar, Iași), *Both Joan* (lic. Gherla), *Burchoschi Aspasia* (Gura Humorului), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Dumitrescu N. C-tin* (lic. Galați), *Faibovici I. Henri* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Franțiu Ioan* (Șc. Polit, Timișoara), *Gheorghiu Gheorghe* (lic. Galați), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), *Irhașiu Viorel* (Șc. Polit., Timișoara), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Mateescu I. Ion* (lic. Matei Basarab, București), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focșani), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popper Ervin* (Timișoara), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rucăreanu N.* (lic. Brașov), *Rusanda Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vladimirschi Veniamin* (lic. Tighina) și *Winkler Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

Observare. D-l *Gheorghiu Gheorghe* a generalizat problema, pentru o ecuație de gradul n.

PROBLEME PROPUSE

540. — Se cere patratul perfect de patru cifre $abcd$ astfel ca ca și db să fie patrate perfecte.

IOAN TH. POPOVICI

541. — Să se găsească patratele perfecte de zece cifre, astfel ca numerile formate din primele lor cinci cifre să fie cu 9000 de unități mai mari ca numerile formate din ultimele lor cinci cifre.

N. G. BOTEA

542. — Se dau două patrate concentrice $ABCD$ și $A'B'C'D'$, P un punct oarecare al cercului $ABCD$ și P' un punct al cercului $A'B'C'D'$. Să se stabilească realația:

$$\overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 + \overline{PC'}^2 + \overline{PD'}^2 = \overline{P'A}^2 + \overline{P'B}^2 + \overline{P'C}^2 + \overline{P'D}^2.$$

Dacă avem însă poligoane de n laturi concentrice $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ și câte un P și P' pe cercurile în care ele sunt înscrise, avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{PA'_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P'A_i}^2$$

GHEORGHE I. GRADIN.

543. — Se dau punctele O, A, B în linie dreaptă. Prin punctele A și B se duc două drepte paralele cu o direcție dată.

O dreaptă mobilă, în jurul lui O taie dreptele duse prin A și B în punctele P și Q. Fie P' și Q' simetricele lor în raport cu punctele A și B. Se cere locul geometric al proecțiunii punctului O pe dreptele PQ' și QP'.

AUGUST COMAN

544. — Se dă ecuația:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

cu rădăcinele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$. Să se demonstreze că, pentruca suma produselor luate două câte două a rădăcinelor $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ să fie zero, trebuie ca α_1 să fie o rădăcină a ecuației:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

V. ALACI

545. — Să se rezolve ecuația;

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

știind că:

$$a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4) = c.$$

GH. GH. VASILIU

546. — Dacă $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ sunt arcele ale căror tangente sunt respectiv egale cu rădăcinele ecuației:

$$x^{2n+1} + p x^{2n} + \ldots + p^{2n} x + p^{2n+1} = 0,$$

să se arate că:

$$\Sigma \operatorname{tg} a_1 = \operatorname{tg} \Sigma a_1$$

$$\Sigma \operatorname{cot} a_1 = \operatorname{cotg} \Sigma a_1.$$

RADULESCU C. MIHAIL

547. — Să se arate că în orice triunghiu, expresia:

$$E = \frac{s^2}{p^4} \sum \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot \sum \frac{4R}{s} h_a \cos^2 \frac{A}{2},$$

este constantă.

BALASESCU C.

548. — Se dau n forțe concurente care formează două câte două unghiuri egale și ale căror extremități descriu o elipsă dată cu centru în punctul lor comun. Se cere locul geometric al extremității rezultantei lor.

ION C. SCHILERU-DILI.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

A apărut „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 IUNIE 1926 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. MICU GRŰNBAUM. TEOREME REMARCABILE DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI.
2. NOTE MATEMATICE, 7, 8.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 374, 436, 438, 510, 521, 525, 536, 539.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunil problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

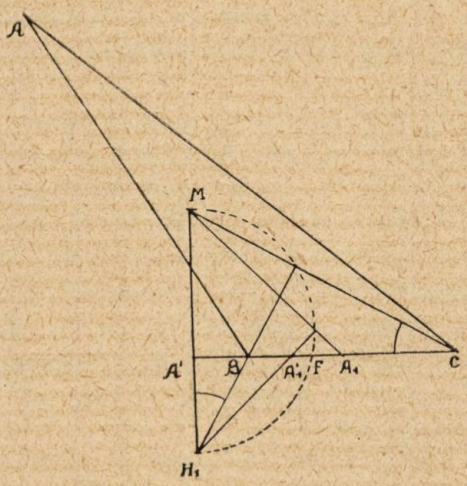
PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

TEOREME REMARCABILE DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

de MICU GRÜNBAUM

Fie M, N, P trei puncte în planul triunghiului ABC și a căror proecții A', B', C' pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB iar A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC. Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 tae laturile BC, CA și AB respectiv în A_1', B_1'. C_1'. Cercul descris pe H_1M ca diametru tae latura BC în F. Triunghiurile $MA'C$ și $H_1A'B$ sunt asemenea, deci:



$$\frac{A'C}{MA'} = \frac{A'H_1}{A'B}$$

deci $A'C \cdot A'B = A'M \cdot A'H_1$ și cum $A'M \cdot A'H_1 = \overline{A'F}^2$ rezultă:

$$(1) \qquad A'B \cdot A'C = \overline{A'F}^2.$$

Analog ca mai sus se vede că:

$$(2) \qquad A'A_1' \cdot A'A_1 = \overline{A'F}^2.$$

Din (1) și (2) avem:

$$A'B \cdot A'C = A'A_1' \cdot A'A_1$$

$$\therefore \quad \frac{A'B}{A'A_1} = \frac{A'A_1'}{A'C}$$

$$(1') \qquad \therefore \quad \frac{A'B - A'A_1'}{A'A_1 - A'C} = \frac{A'B}{A'A_1} = \frac{A_1'B}{CA_1}$$

sau:

$$(2') \qquad \frac{A'A_1 - A'B}{A'C - A'A_1'} = \frac{A'A_1}{A'C} = \frac{BA_1}{CA_1'}$$

înmulțind (1') cu (2') obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_1'B}{A_1'C}.$$

In acelaș chip, putem scrie două relații absolut analoage:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{B_1'C}{B_1'A} \quad \text{și} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_1'A}{C_1'B}$$

și înmulțindu-le avem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{A_1B}{A'C} \cdot \frac{A_1'B}{A_1'C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{B_1'C}{B_1'A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_1'A}{C_1'B}$$

deci când A', B', C' sunt picioarele a trei ceviene:

a) Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, A_1', B_1', C_1' sunt colineare.

b) Dacă A_1, B_1, C_1 sunt colineare, dreptele AA_1', BB_1', CC_1' sunt concurente,

iar când A', B', C' sunt trei puncte colineare.

a) Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente și AA_1', BB_1', CC_1' sunt concurente.

b) Dacă A_1, B_1, C_1 sunt colineare și A_1', B_1', C_1' sunt colineare.

Deci putem enunța bazați pe aceste considerații generale, diferite chestiuni remarcabile.

M, N, P fiind trei puncte a căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a trei ceviene și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB, — fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC. Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 formează un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

Cazuri particulare: 1) Când punctele M, N, P sunt respectiv vârfurile A, B, C ale triunghiului. punctele H_1, H_2, H_3 se confundă în ortocentrul triunghiului ABC și obținem chestiunea clasică:

Perpendicularele din ortocentrul triunghiului ABC pe trei ceviene ale triunghiului ABC determină trei puncte colineare pe laturile triunghiului.

2) Când punctele M, N, P sunt respectiv confundate în ortocentrul H al triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 sunt picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC, ortocentrele triunghiului MBC, NBA și PAB sunt respectiv în A, B, C și obținem:

a) A_1, B_1, C_1 fiind picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC, a cărui ortocentru e H, perpendicularele din A, B, C respectiv pe HA_1, HB_1, HC_1 formează un triunghiu omologic și circumscris triunghiului ABC. (A se vedea și problema 1616 a d-lui Col. *Gh. Buiclia* G. M., vol. XVI). Reciproca acesteia este:

b) Perpendicularele din ortocentrul H al triunghiului ABC pe laturile unui triunghiu omologic și cricumscris triunghiului ABC, determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC.

Chestiunea aceasta se deduce lesne și din următoarea obținută prin transformarea cosogonală:

I fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC, cercurile descrise pe IA_1, IB_1 și IC_1 ca diametre tae respectiv cercurile BIC, CIA și AIB în A', B', C'. Dreptele IA, IB, IC determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului A'B'C' iar dreptele IA', IB', IC' determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC.

3) Când punctele M, N, P se confundă cu un punct P al cubicei *Darboux* și H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor BPC, CPA, și APB iar A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC avem:

a) Perpendicularele din P pe dreptele H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC.

b) Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe PA_1, PB_1, PC_1 formează un triunghiu Δ, omologic cu triunghiul ABC și perpendiularele din P pe laturile triunghiului ABC determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului Δ.

De oarece vârfurile și ortocentrul unui triunghiu formează un grup ortocentric, prima teoremă generală o putem enunța astfel:

I. M, N, P fiind trei puncte a căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a trei ceviene și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB, — fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC. Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 formează un triunghiu omologic cu triunghiul ABC precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1, formează un triunghiu omologic cu triunghiul ABC. Absolut analog avem și următoarele două teoreme remarcabile:

II. M, N, P fiind trei puncte a căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a trei ceviene și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB, — fie A_1, B_1, C_1 trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC. Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină picioarele a două perechi de ceviene pe laturile triunghiului ABC.

III. M, N, P fiind trei puncte a căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt trei puncte colineare și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB, — fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC, perpendicularele din H_1, H_2, H_3

respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare, după natura punctelor A_1, B_1, C_1.

Ținându-se seamă de următoarea teoremă a d-lui *Tib. Popovici.*

Cubica lui *Darboux* a triunghiului ABC este locul punctelor a căror ceviene retae cercul circumscris triunghiului în puncte astfel că proecțiile lor pe BC, CA, AB sunt vârfurile unui triunghiu omologic cu triunghiul ABC, — putem enunța având în vedere și teoremele de mai sus:

Cevienele unui punct al cubicei *Darboux* retae cercul circumscris în M, N, P. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB; A_1, B_1, C_1 fiind picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC, Avem:

a) Când A_1, B_1, C_1 sunt picioarele a trei ceviene, perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele diu M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 formează câte un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

b) Când A_1, B_1, C_1 sunt colineare perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC. Am demonstrat cu altă ocazie că, Q fiind un punct al cubicei *Darboux*, perpendicularele în Q pe QA, QB, QC tae respectiv cercurile BQC, CQA și AQB în M, N, P astfel că proecțiile punctelor M, N, P pe laturile triunghiului ABC sunt picioarele a trei ceviene. Aceasta constitue de asemenea un caz particular al configurației studiate, — demn de relevat:

Q fiind un punct al cubicei *Darboux*, perpendicularele în Q pe QA, QB, QC tae respectiv cercurile BQC, CQA și AQB în M, N, P. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB și A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC.

a) Când A_1, B_1, C_1 sunt picioarele a trei ceviene, perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1, PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 formează câte un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

b) Când A_1, B_1, C_1 sunt colineare perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului ABC.

Aplicațiile sunt numeroase și interesante. Ținându-se seamă de următoarea teoremă pe care am dat-o ca o generalizare a dreptei *Simson:*

Q fiind un punct oarecare în planul triunghiului ABC, o dreaptă ce trece prin Q tae cercurile BQC, CQA și AQB în trei puncte a căror proecții pe laturile triunghiului ABC sunt colineare. — Putem enunța.

Q fiind un punct în planul triunghiului ABC, — o dreaptă ce trece prin Q tae cercurile BQC, CQA și AQB respectiv în M, N, P. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BMC, CNA și APB, — și fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare pe laturile triunghiului ABC. Perpendicularele din H_1, H_2, H_3 respectiv pe MA_1, NB_1 și PC_1 precum și perpendicularele din M, N, P respectiv pe H_1A_1, H_2B_1 și H_3C_1 determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare, după natura punctelor A_1, B_1, C_1.

In acelaș spirit se tratează și următoarea teoremă, precum și chestiunile corelative.

Fie M, N, P trei puncte a căror proecții M_1, N_1, P_1 respectiv pe laturile BC, CA, AB sunt picioarele a trei ceviene. Cercul descris pe MM_1 ca diametru tae laturile MB și MC în A′ și A″. Dreptele A′A″, MM_1 se tae în M_a. Analog față de celelalte laturi și din punctele N și P obținem N_b și P_c. Laturile unui triunghiu Δ, circumscris triunghiului MNP și care determină pe laturile triunghiului ABC trei puncte colineare sau picioarele a trei ceviene, tae cercurile descrise pe MM_1, NN_1 și PP_1 ca diametre în M′, N′, P′. Dreptele $M'M_a$, $N'N_b$ și $P'P_c$ tae cercurile descrise pe MM_1, NN_1 și PP_1 ca diametre în A_1, B_1, C_1.

a) Când triunghiul Δ e omologic cu triunghiul ABC, dreptele MA_1 NB_1 și PC_1 determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene.

b) Când laturile triunghiului Δ, determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene, dreptele MA_1, NB_1 și PC_1 formează un triunghiu amologic cu triunghiul ABC.

Când M, N, P sunt trei puncte astfel ca proecțiile lor M_1, N_1, P_1 pe laturile BC, CA, AB să fie colineare avem tot 2 cazuri.

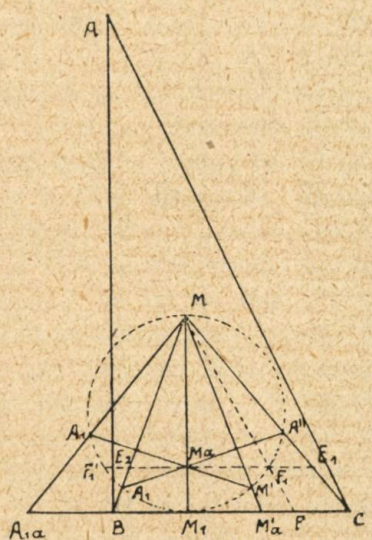
a) Când triunghiul Δ e omologic cu triunghiul ABC, dreptele MA_1, NB_1 și PC_1 formează un triunghiu omologic cu triunghiul ABC.

b) Când laturile triunghiului Δ, determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene, dreptele MA_1, NB_1 și PC_1 determină picioarele a trei ceviene pe laturile triunghiului Δ.

Cazuri particulare remarcabile sunt: pentru prima parte, când M, N, P sunt punctele unde cevienele unui punct al cubicei *Darboux* retae cercul circumscris și pentru ultima parte când M, N, P sunt punctele unde o secantă arbitrară dusă printr'un punct Q tae cercurile BQC, CQA și AQB.

Chestiunile se tratează cum vedem, cu o rară eleganță și cu o mare bogăție de desfășurare a propozițiilor corelative, de aceia studierea lor merită o deosebită atenție.

Justificarea celor enunțate e simplă:



Fie M, N, P trei puncte a căror proecții M_1, N_1, P_1 respectiv pe laturile BC, CA, AB sunt picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare. Cercul descris pe MM_1 ca diametru tae laturile MB și și MC în A' și A''. Dreptele $A'A''$ și MM_1 se tae în M_a. Analog față de celelalte două laturi și din punctele N și P obținem N_b și P_c. Laturile unui triunghiu Δ circumscris triunghiului MNP și care determină pe laturile triunghiului ABC punctele M'_a, N'_b, P'_c colineare sau picioarele a trei ceviene, tae cercurile descrise pe MM_1, NN_1 și PP_1 ca diametre în M', N', P'. Dreptele $M'M_a$, $N'N_b$ și $P'P_c$ retae cercurile descrise pe MM_1, NN_1 și PP_1 ca diametre în A_1, B_1, C_1. Dreptele MA_1, NB_1 și PC_1 tae laturile BC, CA, AB respectiv în A_{1a}, B_{1b}, C_{1c}. Paralela din M_a la BC tae cercul descris pe MM_1 ca diametru în F_1 și F'_1 și aceiaș paralelă tae laturile MC și MB în E_1 și E_2. Dreapta MF_1 tae pe BC în F. De oarece $M_aF_1 = M_aF'_1$ rezultă:

$$M_aA' \cdot M_aA'' = \overline{M_aF_1}^2; \tag{3}$$

dreptele BC și $A'A''$ fiind antiparalele în BMC rezultă că și dreptele E_1E_2 și $A'A''$ sunt antiparalele căci $E_1E_2 \parallel BC$; rezultă că punctele E_1, A'', E_2, A' sunt conciclice și deci:

$$M_aA' \cdot M_aA'' = M_aE_1 \cdot M_aE_2$$

și ținând seama de (3) rezultă:

$$M_aE_1 \cdot M_aE_2 = \overline{M_aF_1}^2$$

In această relație înlocuind segmentele prin altele proporționale lor, pot scrie:

$$M_1C \cdot M_1B = = \overline{M_1F}^2. \tag{4}$$

Absolut analog vedem că:

$$M_1M'_a \cdot M_1A_{1a} = \overline{M_1F}^2. \tag{5}$$

Din (4) și (5) deducem:

$$M_1C \cdot M_1B = M_1M'_a \cdot M_1A_{1a}$$

$$\therefore \quad \frac{M_1B}{M_1A_{1a}} = \frac{M_1M'_a}{M_1C}$$

$$\therefore \quad \frac{M_1B - M_1M'_a}{M_1A_{1a} - M_1C} = \frac{M_1B}{M_1A_{1a}} = \frac{M'_aB}{CA_{1a}} \tag{6}$$

în valoare și semn. Sau:

(7) $$\frac{M_1A_{1a}-M_1B}{M_1C-M_1M'_a}=\frac{M_1A_{1a}}{M_1C}=\frac{BA_{1a}}{CM'_a}.$$

Inmulțind (6) cu (7) obținem:

$$\frac{M_1B}{M_1C}=\frac{A_{1a}B}{A_{1a}C}\cdot\frac{M'_aB}{M'_aC}.$$

Pe celelalte două laturi în același chip, putem scrie două relații absolut analoage:

$$\frac{N_1C}{N_1A}=\frac{B_{1b}C}{B_{1b}A}\cdot\frac{N'_bC}{N'_bA}\quad\text{și}\quad\frac{P_1A}{P_1B}=\frac{C_{1c}A}{C_{1c}B}\cdot\frac{P'_cA}{P'_cB}$$

și înmulțindu-le avem:

$$\frac{M_1B}{M_1C}\cdot\frac{N_1C}{N_1A}\cdot\frac{P_1A}{P_1B}=$$

$$\frac{A_{1a}B}{A_{1a}C}\cdot\frac{M'_aB}{M'_aC}\cdot\frac{B_{1b}C}{B_{1b}A}\cdot\frac{N'_bC}{N'_bA}\cdot\frac{C_{1c}A}{C_{1c}B}\cdot\frac{P'_cA}{P'_cB}$$

deci când M_1, N_1, P_1 sunt picioarele a trei ceviene:

a) Dacă AM'_a, BN'_b, CP'_c sunt concurente, A_{1a}, B_{1b}, C_{1c} sunt colineare,

b) Dacă M'_a, N'_b, P'_c sunt colineare, dreptele AA_{1a}, BB_{1b}, CC_{1c} sunt concurente, și când M_1, N_1, P_1 sunt trei puncte colineare.

a) Dacă AM'_a, BN'_b, CP'_c sunt concurente și AA_{1a}, BB_{1b}, CC_{1c} sunt concurente.

b) Dacă M'_a, N'_b, P'_c sunt colineare și A_{1a}, B_{1b}, C_{1c} sunt colineare.

Aceste observații justifică complect cele enunțate. Se știe că:

Fiind date două triunghiuri ABC și MNP, dacă tangentele în M, N, P respectiv la cercurile BMC, CNA și APB determină pe laturile triunghiului ABC picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare, neapărat și tangentele în A, B, C la cercurile ANP, BMP, CMN determină pe laturile triunghiului MNP picioarele a trei ceviene sau trei puncte colineare. (Triunghiurile ABC și MNP sunt numite triunghiuri cosogonale).

Chestiunile tratate mai sus, prezintă un deosebit interes pentru cazul când triunghiul MNP e cosogonal cu triunghiul ABC.

NOTE MATEMATICE

7. *Generalizarea problemei 346.* Problema 346 a cărei soluție s'a publicat la pag. 41, este susceptibilă de generalizare în felul următor:

„Fiind date n numere întregi b^1, b^2, ... b_n, în care exponenții arată indici iar nu puteri, se cere să se găsiască alte n numere a_1, a_2, ... a_n, în progresie aritmetică de rație r așa că a_1 să fie divizibil prin b^1, a_2 prin b^2, ..., a_n prin b^n“.

Numerele cerute vor trebui să satisfacă egalitățile:

(1) $$a_1=m_1b^1,\quad a_2=m_2b^2,\ldots a_n=m_nb^n$$

(2) $$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=r.$$

De aici se deduc egalitățile:

(3) $$b^2m_2-b^1m_1=r$$

(4) $$b^3m_3-b^2m_2=r$$

(5) $$b^4m_4-b^3m_3=r$$

. . . . . .

$(n+1)$ $$b^nm_n-b^{n-1}m_{n-1}=r.$$

Numărul r conține în el și semnul.

Fie b_2, b_1. r_1 câtul împărțirei numerelor b^2, b^1, r prin $c.m.c.d$ al lor chiar atunci când acest $c.m.c.d$ este 1. Admițând notații analoage pentru grupurile de numere b^3, b^2, r; ...; b^n, b^{n-1}, r; egalitățile precedente devin:

(3)′ $$b_2m_2-b_1m_1=r_1$$

(4)′ $$b_3m_3-b_2m_2=r_2$$

(5)′ $$b_4m_4-b_3m_3=r_2$$

. . . . . .

. . . . . .

Fie acum $R_{i_1}=\frac{P_{i_1}}{Q_{i_1}}$ ultima redusă a fracției $\frac{b_2}{b_1}$ dezvoltată în fracție continuă și t_1 un parametru variabil. Soluțiile generale ale ecuației (3)′ vor fi:

(3)″ $$m_2=(-1)^{i_1}Q_{i_1-1}r_1+b_1t_1;$$
$$m_1=(-1)^{i_1}P_{i_1-1}r_1+b_2t_1.$$

La fel soluțiile generale ale ecuației (4)′ și (5)′ sunt:

$$(4)'' \quad \begin{cases} m_3 = (-1)^{i_2} Q_{i_2-1}\, r_2 + b_2\, t_2\,; \\ m_2 = (-1)^{i_2} P_{i_2-1}\, r_2 + b_3\, t_2 \end{cases}$$

$$(5)'' \quad \begin{cases} m_4 = (-1)^{i_3} Q_{i_3-1}\, r_3 + b_3\, t_3\,; \\ m_3 = (-1)^{i_3} P_{i_3-1}\, r_3 + b_4\, t_3 \end{cases}$$

și așa mai departe pentru celelalte ecuațiuni.

Sistemul (3)″, (4)″ ... ne dă acum:

$$(3)''' \quad b_3\, t_2 - b_1\, t_1 = (-1)^{i_1} Q_{i_1-1}\, r_1 - (-1)^{i_1} P_{i_2-1}\, r_2$$

$$(4)''' \quad b_4\, t_3 - b_2\, t_2 = (-1)^{i_2} Q_{i_2-1}\, r_2 - (-1)^{i_3} P_{i_3-1}\, r_3.$$

. . . . . .

De aici înainte se vede că spiritul metodei este cel întrebuințat la problema 346. In cazul general problema necesită, după cum se vede, formule și calcule multe și anevoioase. Un caz particular al acestei probleme generale este acela când și numerile b^1, b^2, ... b^n sunt în progresie aritmetică. In acest caz nu mai este nevoe să se dea r. Problema pentru cazul numerelor b^1, b^2 ... în progresie aritmetică, a fost publicată ca generalizare a problemei 672 în *Gazeta Matematică*, vol. VIII, pag. 116.

COL. GH. BUICLIU

8. *Asupra problemei 523, R. M. T., No. 3, 1926. Știind că ecuația:*

$$x^3 + (p-3)x^2 + 2qx + 2(1-q) = 0,$$

are ca rădăcini $sec^2 A$, $sec^2 B$, $sec^2 C$, *să se formeze ecuația care admite ca rădăcini,* $tg^2 A$, $tg^2 B$, $tg^2 C$

Dacă însemnăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației date, și cu X_1, X_2, X_3 rădăcinele ecuației cerute, și ținem seamă de relația cunoscută:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1,$$

putem scrie:

$$X_i = x_i - 1, \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$\therefore \quad x_i = X_i + 1.$$

Inlocuind în ecuația dată x prin x_i, avem:

$$(X_i+1)^3 + (p-3)(X_i+1)^2 + 2q(X_i+1) + 2(1-q) = 0$$
$$\therefore \quad X_i^3 + pX_i^2 + (2p + 2q - 3)X_i + p = 0,$$

și cum $i = 1, 2, 3$, înseamă că toate rădăcinele X_1, X_2, X_3 satisfac ecuația:

$$X^3 + pX^2 + (2p + 2q - 3)X + p = 0,$$

care este ecuația cerută.

V. ALACI

RECREAȚII MATEMATICE

PROBLEME DE GHICIREA NUMERELOR

In secolul XVII și XVIII era foarte la modă ca între jocurile de societate să fie și acela al ghicirei de numere. La acea epocă aritmetica era altfel studiată și cunoscută de cât este astăzi, De aceia acest gen de probleme stârneau o adevărată admirație pentru aceia care le propuneau și le rezolvau. Și astăzi se poate spune că pentru multă lume aceste probleme sunt un subiect care produce mirare.

Există o mare varietate de recreații de această natură. Vom da în cele ce urmează câteva din ele, pentru că în vacanțele care încep peste câteva zile după apariția acestui număr al revistei corespondenții sa găsească și părți recreative matematice.

I. Pentru prima problemă vom conveni a zice *jumătatea mică* a unui număr nepereche $2n+1$ numărul n, iar *jumătatea mare* numărul $n+1$. Iată problema:

Gândiți-vă la un număr. Luați jumătatea lui sau jumătatea mică. *Adăugați 1 și înmulțiți rezultatul cu 6. Produsul împărțiți-l cu 3. Câtul comunicați-l ghicitorului. Acest cât micșorat cu 2 sau cu 1, după cum numărul ales în gând a fost pereche sau nu, este numărul ales.*

1°. Numărul ales în gând este de exemplu 22. Operațiile din enunț sunt:

$$\left\{\left[\left(\frac{22}{2}+1\right)\times 6\right] : 3\right\} - 2 = 22,$$

și în general:

$$\left\{\left[\left(\frac{2n}{2}+1\right)\times 6\right]\right] : 3\Big\} - 2 = 2n.$$

2°. Numărul ales este nepereche $23 = 22 + 1$. conform enunțului operațiile ce se fac în gând sunt aceleași numai că din câtul dat se scade 1 în loc de 2.

II. *Cereţi ca jucătorul să-şi aleagă un număr, să-l tripleze, la rezultat să adauge 1; rezultatul să-l tripleze şi apoi să adune numărul ales. Suma obţinută vi se comunică. Din această sumă scădeţi 3 şi veţi obţine numărul ales considerând zecile rezultatului:*

Fie x numărul ales. Operaţiile din enunţ sunt:

$$\{[(x\times 3)+1]\times 3\}+x=10x+3.$$

Se vede că x se obţine de aici scăzând pe 3 şi împărţind rezultatul prin 10.

III. O persoană şi-a ales în gând un număr de mai multe cifre şi mai multe numere de o cifră. Cereţi-i să dubleze primul număr şi să adauge apoi 1, rezultatul să-l înmulţească cu 5 şi să adauge numărul al doilea; apoi să dubleze şi să adauge 1; să înmulţească cu 5 şi să adauge al treilea număr, etc., oprind operaţiile în momentul în care s'a adăugat ultimul număr. Cereţi rezultatul acesta şi scădeţi din el un număr format din atâţia 5 câte numere şi-a ales jucătorul. In diferenţa obţinută cifra unităţilor va fi ultimul număr ales de jucător, cifra zecilor penultimul etc.

De exemplu jucătorul a ales numerele 234, 7, 8 şi 3. După cele spuse avem succesiv:

$234\times 2+1$

$234\times 10+7+5$

$234\times 20+7\times 2+11$

$234\times 100+7\times 10+8+55$

$234\times 200+7\times 20+8\times 2+111$

$234\times 1000+7\times 100+8\times 10+3+555=$

$234783+555=235338.$

Din rezultatul obţinut scăzând 555 se obţine 234783 care dă cele 4 numere de găsit.

Persoana care şi-a ales cele 4 numere făcând calculele direct nu poate găsi explicaţia, căci rezultatele succesive sunt 469, 2375, 4705, 23533, 47067, 235338.

In realitate operaţiile din enunţ nu sunt decât înmulţirea numerelor alese prin puterile succesive a lui 10. La fiecare operaţie se adună 1 numai pentru a deturna atenţia şi a împedeca descoperirea artificiului.

(Din Récréations Arithmétiques par E. Fourrey).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul, XXXI, No. 9, Mai 1926. Rezultatul concursului „*Gazetei Matematice*", din anul 1926, de *G. Ţiţeica*. Asupra dreptelor ale căror toate punctele sunt depărtate egal de trei drepte date. Drepte echidistante, de *N. Abramescu*. Câteva proprietăţi ale unei clase de patrulatere, de *Cristea Mateescu*.

2. *Ziarul Matematic* (litografiat), Premii. Spaţiul cu 4 dimensiuni, de *Vulpanovici Boris*.

3. *Revista de Ciencias*, Ano XXIX, *Lima-Perú*, N-rile 1 — 3, Ianuarie şi Martie 1926. Resistencia de los columnas temendo en cuenta su peso propio, *Dr. Godofredo Garcia*. Contribuciones a la Fauna Entomológica del Perú y regiones vecinas, *Dr. Carlos E. Porter*.

PROBLEME REZOLVATE

374. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=2}^{n}(2^{n-k+1}-1)(k^2-3k)=2(2^n-1)-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

V. ALACI

Dacă în identitatea evidentă:

$$\sum_{k=2}^{n}[f(k-1)-f(k)]=f(1)-f(n),$$

luăm:

$$f(k)=2^{n-k+1}(k^2+k),$$

avem:

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{2^{n-(k-1)+1}[(k-1)^2+(k-1)]-2^{n-k+1}(k^2+k)\right\}$$
$$=2^n\cdot 2-(n^2+n)$$

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{n}2^{n-k+1}[2(k-1)^2+2(k-1)-k^2-k]=$$
$$2^{n+1}-2n(n+1),$$

sau:

$$(1)\quad \sum_{k=2}^{n}2^{n-k+1}(k^2-3k)=2^{n+1}-2n(n+1)$$

De altă parte, avem:

$$\sum_{k=2}^{n}(k^2-3k)=\sum_{k=2}^{n}k^2-3\sum_{k=2}^{n}k=$$

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)-3\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)=$$

$$\frac{n(n+1)}{3}\left(\frac{2n+1}{2}-\frac{9}{2}\right)+2,$$

$$(2)\qquad \sum_{k=2}^{n}(k^2-3k)=\frac{n(n+1)(n-4)}{3}+2.$$

Scăzând relaţia (2) din (1), avem:

$$\sum_{k=2}^{n}(2^{n-k+1}-1)(k^2-3k)=2^{n+1}-2n(n+1)-$$

$$\frac{n(n+1)(n-4)}{3}-2=2(2^n-1)-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

adică tocmai identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Berdan C-tin*, *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat. Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (Şc. Polit., Bucureşti) şi *Tărăbuţă C. Paul* (Şc. Polit., Bucureşti).

436. — *Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinele ecuaţiei:*

$$x^2+px+p+1=0,$$

să se afle maximul funcţiunei:

$$y=\operatorname{arc\,tg}x_1,\ \operatorname{arc\,tg}x_2.$$

Să se rezolve ecuaţia în acest caz.

EMIL ŞTEFĂNESCU

1. Dacă notăm:

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tg}x_1=\alpha,\quad \operatorname{arc\,tg}x_2=\beta,$$

rezultă că avem de calculat maximul produsului:

$$(2)\qquad y=\alpha\beta.$$

Dar suma acestor factori este constantă. In adevăr, avem:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

şi cum din (1), deducem:

$$\operatorname{tg}\alpha=x_1,\quad \operatorname{tg}\beta=x_2,$$

rezultă:

$$(3)\qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}.$$

Dar x_1, x_2 fiind rădăcinele ecuaţiei date, rezultă din relaţiile cunoscute între rădăcini şi coeficienţi:

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=p+1$$

astfel că (3) devine:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{-p}{1-(p+1)}=1,$$

$$(4)\qquad \therefore\quad \alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

In virtutea relaţiei (4), care scrie că suma factorilor din (2) este constantă, atunci maximul lui y, după o teoremă bine cunoscută are loc, când factorii sunt egali, deci când:

$$\alpha=\beta=\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{8}\right)\pi,$$

şi atunci:

$$\text{maximul } y=\left(\frac{4k+1}{8}\right)^2\cdot\pi^2,\quad k=0,\ 1.\ 2,\ldots$$

2. Fiindcă în cazul maximului:

$$\operatorname{arc\,tg}x_1=\operatorname{arc\,tg}x_2,$$

rezultă:

$$x_1=x_2,$$

ceiace necesită, ca realizantul ecuaţiei date să fie nul, adică:

$$p^2-4p-4=0$$

$$\therefore\quad p=2(1\pm\sqrt{2}),$$

în care caz, ecuaţia dată devine:

$$x^2+2(1\pm\sqrt{2})x+2(1\pm\sqrt{2})+1=0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1=x_2=-(1\pm\sqrt{2}).$$

Soluţii date de d-nii: *Beja Traian*, *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir. Bucureşti), *Caracaş I. Gheorghe* (lic. Botoşani), *Caproiu M. I.* (Câmpina), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dimitrescu A. Miş* (lic. Roman), *Hart Lazăr* (lic. Galaţi), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iaşi), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Niculescu Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Paslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Popovici Aurel* (Focşani),

Rădulescu C. Mihail (lic. R.-Sărat), *Schächter M. Ozias*, *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, București), *Stoica I. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Țanovici C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara) și *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

Observare. D-l *Manolescu I. Niculae*, a tratat aceiași problemă și în cazul când s'ar fi cerut maximul lui:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x_1 . \operatorname{arc\,cot} x_3 .$$

438. — *Să se găsiască cel mai mic număr care să fie egal cu de 5 ori produsul cifrelor sale.*

SUBLOCOT. I. M. IONIȚA

Numărul căutat fiind egal cu de 5 ori produsul cifrelor sale, rezultă că nici una din cifrele lui nu poate fi zero, nici cifră cu soț și că el trebue să fie multiplu de 5. Ultima lui cifră trebue să fie 5. Dar numărul fiind egal cu de 5 ori produsul cifrelor sale, una din cifre fiind 5, rezultă că el este multiplu de 25, și din cele spuse el nu se poate termina de cât cu 75. Numărul cerut fiind divizibil prin produsul cifrelor sale, rezultă că e divizibil și cu $7 \times 5 = 35$, fiind divizibil și cu 25, vom lua cel mai mic comun multiplu între 25 și 35 adică 175, căci se cere cel mai mic număr.

Numărul 175 satisface enunțul, căci:

$$175 = 5 . 1 . 7 . 5,$$

el este deci soluția cerută.

Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Avramescu T. Ion* (Caracal), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, București), *Bălășescu C.* (lic. Milit. Tg.-Mureș), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boroș P. Dan* (lic. Național, Iași), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iași), *Chiru Nanov* (lic. Internat, Iași), *Cocea Gh. Theodor* (lic. Pitești), *Cojoc N. Gh.* (Piatra-Neamț)), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit. Iași), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dângă S. Vlad* (lic. Orhei), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dumitriu D. Emil* (lic. Cantemir, București), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., București), *Dumitrescu Gh. I. Gostavăț* (lic. Caracal), *Dumitrescu Nathalia* (Șc. Normală, București), *Feldștein M. Solomon* (lic. ,Pitești), *Feinstein Herman* (lic. P.-Neamț), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca, I., Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gherbanowsky Nicolae* (lic. Orhei), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Gheorghiu Gheorghe* (lic. Galați), *Goldstein Paul* (lic. Național, Iași), *Grabovschi Eugen* (Orhei), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Grünberg L. M.* (lic. Național, Iași), *Hart Lazăr*, (lic. Galați), *Hulubei Telemac* (lic. Internat, Iași), *Iacob St. Eugen* (Botoșani), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Iliuță I. Dăbuleni* (lic. Caracal), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureș), *Iscovici Paul* (Pitești), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Ivanovici A. Nicolae* (lic. Brașov), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Kertesz I. Paul*, *Lăzărescu I. Ion* (lic. Sf. Sava, București), *Lupescu V. Eugen* (lic. Pitești), *Macri Ștefan*, *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Marineanu Traian* (lic. Timișoara), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Matak D. Radu* (Semin. Pedag., București), *Mihăilescu St. Niculae* (lic. Matei-Basarab, București), *Moașa Virgil* (București), *Moldoveanu Marin*, *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Mützel A.* (lic. Cernăuți), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Niculescu St. Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Nicolau C. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Nițescu Paula* (Șc. Normală, București), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pavelescu Th. Mircea* (Tg.-Jiu), *Pislaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popa Petrescu Niculae* (lic. Brașov), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Tg.-Mureș), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Pușcă I. Toma* (lic. Iniernat, Iași), *Potârniche Octav*, *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Roman Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Severin C. Marcel* (lic. Botoșani), *Sfințescu T. Duiliu* (lic. Lazăr, București), *Sigall Louis* (lic. Național, Iași), *Silistrărianu C.* (Ploești), *Stern B. Arthur* (lic. Carol, Craiova), *Stoica Aureliu* (București), *Stoicescu Theodor* (lic. Internat, Iași), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Theodorescu C.* (lic. Tg.-Mureș), *Troia L.* (lic. R.-Sărat), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasiliu B* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Voinescu D. I.* (lic. Cantemir, București), *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

510. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{m^2-1}{2} \sin^2 x + k \sin x \cos x + k \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

EMIL STEFANESCU

Ecuația dată se poate scri:

$$(m^2-1)(1-\cos^2 x) + 2k \sin x (1+\cos x) + 2(\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore (1+\cos x)\left[(m^2-1)(1-\cos x) + 2k \sin x + 2\right] = 0.$$

De unde:

$$(1) \qquad 1 + \cos x = 0,$$

$$(2) \qquad (m^2-1)(1-\cos x) + 2k \sin x + 2 = 0.$$

Ecuația (1) ne dă:

$$\cos x = -1,$$

$$\therefore x = (2k+1)\pi.$$

Ecuația (2) se poate scrie încă:

$$2(m^2-1)\sin^2\frac{x}{2}+4k\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2=0,$$

sau:

$$m^2\sin^2\frac{x}{2}+2k\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Impărţind cu $\cos^2\frac{x}{2}$, găsim:

$$m^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2k\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-k+\sqrt{k^2-m^2}}{m^2},$$

deci:

$$x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{-k\pm\sqrt{k^2-m^2}}{m^2}.$$

Pentru a avea arce reale se impune:

$$k^2-m^2\geqq 0,$$

adică:

$$k\leqq -m \quad\text{sau}\quad k>m, \quad\text{dacă}\quad m>0.$$

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter O.*, *Cernes A. M.* (Iaşi), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Piteşti), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Nestor Gh. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Craiova), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rusanda P. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Samoilă D-tru, Scripcă Laur* (Şc. Polit., Bucureşti), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi).

521. — *Să se stabilească identitatea*:

$$abc\left[\frac{1}{a^2(b-a)}+\frac{1}{b^2(a-b)}\right]-$$

$$(ab+ac+bc)\left[\frac{1}{a(b-a)}+\frac{1}{b(a-b)}\right]=-1.$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru, putem scrie succesiv:

$$E=\frac{abc}{b-a}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{ab+ac+bc}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{c(b+a)}{ab}-\frac{ab+ac+bc}{ab}=-\frac{ab}{ab}=-1.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Akerman Casimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bărbulescu M. Tudor* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Bârs Petru* (lic. Sibiu), *Bogdan C.* (student, Cluj), *Busuioc C. Virgil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Carabeţeanu Gh. Petru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Ciolacu Miron* (Şc. Milit. de Artilerie), *Cocorandu Dan* (Şc. Milit. de Geniu), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Costinescu Antoaneta* (Instit. Ortodox, Iaşi), *Dânga S. Vlad* (Şc. Polit., Timşoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinu D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dragnea Ovidiu* (lic. Roman), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gancea Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Gh. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ghişoiu I.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grabovschi Eugeniu* (Orhei), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Hacig Ioan* (lic. P.-Neamţ), *Hohoi Vasile, Iacob St. Eugen* (Botoşani), *Isăcescu C. T.* (lic. Tg.-Jiu), *Lupşan Nedelcu* (lic. Braşov), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Marcu Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mateescu I. Ion* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mocuţa Traian* (lic. Arad), *Moşoiu Alexandru* (lic. Braşov), *Meacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Nicolau Vasile* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Olteanu Nicu* (lic. Arad), *Oprea N. Gheorghe* (lic. Braşov), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pascariu Alexe* (Şc. Polit., Timişoara), *Philip Iosef* (lic. German-Maghiar, Timişoara), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Popper Ervin* (Timişoara), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Tg.-Mureş), *Puşcariu Mihail* (lic. Braşov), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Săcăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Segârcianu D. C-tin* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Steriade C* (lic. Piteşti), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoicoiu M. Traian* (lic. T.-Jiu), *Th odorescu St. Paul* (lic. Roman), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vladimirschi Veneamin* (lic. Tighina), *Weintraub Mandy* (lic. Lazar, Bucureşti) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

525. — *Să se găsească numerile prime de cinci cifre, în care suma ultimelor două cifre este egală cu suma primelor două, iar suma cifrelor să fie un patrat perfect.*

POPESCU C. VIRGILIU

Soluţie dată de d-l: *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat).

Grupele de cinci cifre consecutive ce se pot forma, sunt:

0, 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; 2, 3, 4, 5, 6;
3, 4, 5, 6, 7; 4, 5, 6, 7, 8; 5, 6, 7, 8, 9.

Dintre aceste grupe nu reținem de cât următoarea:

(1) 3, 4, 5. 6, 7.

de oarece numai suma cifrelor acestei grupe este un patrat perfect. Trebuind însă ca suma primelor două cifre ale numărului cerut, să fie egală cu suma ultimilor două, nu le putem grupa de cât astfel:

4. 5 și 3, 6
4, 6 și 3, 7
5, 6 și 4, 7.

Ținând încă seamă că ultima cifră este impară, de oarece numerile cerute sunt prime, putem forma următoarele numere cu cifrele grupei (1):

45763	46573
54763	64573
64537	56347
46537	65347

Dintre acestea 64537 se divide cu 11; 54736 se divide prin 23; 56347 se divide cu 29; 64573 se divide prin 31; 65347 se divide prin 101; 46537 se divide prin 173. Ne mai rămân numerile 45763 și 46573, care sunt prime și deci sunt soluțiile problemei.

Soluții parțiale date de d-nii: *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Iacob Șt. Eugen* (lic. Botoșani), *Isăcescu C. T.* (lic. T.-J.u), *Manolescu N. I.* (Focșani), *Podariu Alex.* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iași), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stan I. Aurelian* (lic. Iași), *Steriade C.* (lic. Pitești) și *Troia L.* (lic. R.-Sărat).

536. — *Să se verifice identitatea:*

$$\frac{1+ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a+b}=\frac{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}}$$

I. DUMITRIU-ARAD

Insemnând cu E membrul al doilea și înmulțind și numărătorul și numitorul cu conjugata numitorului, avem:

$$E=\frac{(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}}{(\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}}=$$

$$\frac{a(1-b^2)-b(1-a^2)-(a-b)\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a^2-b^2}=$$

$$\frac{(a-b)(1+ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a^2-b^2}=$$

$$\frac{1+ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a+b},$$

și identitatea este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Akerman Casimir* (lic. Lazăr, București), *André d'Albon* (lic. Național, Iași), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bărbulescu Tudor* (lic. Lazăr, București), *Carabeteanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, București), *Cădariu I.* (lic. Arad), *Călniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Ciolacu Miron* (Șc. Milit. de Artilerie), *Cocoranău Dan* (Șc. Milit. de Geniu), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit, Iași), *Costinescu Antoaneta* (Instit. Ortodox, Iași), *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinu D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dragnea Ovidiu* (lic. Roman), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Effingam Grant* (lic. Brașov), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Ganea Vasile* (București), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Gh. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Grabovscki Eugeniu* (Orhei), *Hacig B. Ioan* (lic. P.-Neamț), *Hahoi V.* (lic. Brașov), *Iacob St. Eugeniu* (Botoșani), *Isăcescu C. T.* (lic. T.-Jiu), *Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marcu Alexandru* (Șc. Polit. Timișoara), *Mateescu I. Ioan* (lic. Matei-Basarab, București), *Mortun Emil* (lic. Lazăr, București), *Moșoiu Alexandru* (lic. Brașov), *Munteanu Zeno* (lic. Arad), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Nestor Gh. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit, Craiova), *Nicolau Vasile* (lic. Matei-Basarab, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Olteanu Nicu* (lic. Arad), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pescariu Alexe* (Șc. Polit., Timișoara), *Pascu Silviu* (lic. Arad), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu G. Mircea* (lic. Arad), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popper Ervin* (Timișoara), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Robu Ionel* (lic. Arad), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Săcăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Segărceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Steriade C.* (lic. Pitești), *Stoicoiu M. Traian* (lic. Tg.-Jiu), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vladimirschi Veniamin* (lic. Tighina), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

539. — *Să se stabilească relația:*

$$\frac{\sin^n(A+B)}{\sin^{2n}C}+\frac{\sin^n(B+C)}{\sin^{2n}A}+\frac{\sin^n(C+A)}{\sin^{2n}B}=\frac{h_a^n+h_b^n+h_c^n}{s^n}R^n,$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

GH. GH. VASILIU

Ţinând seamă că:

$$\sin(A+B)=\sin C=\frac{c}{2R}=\frac{c}{2s}\cdot\frac{s}{R}=\frac{1}{h_c}\cdot\frac{s}{R},$$

putem scrie:

$$\frac{\sin^n(A+B)}{\sin^{2n}C}=\frac{\sin^n C}{\sin^{2n}C}=\frac{1}{\sin^n C}=\frac{h_c^n}{s^n}R^n.$$

Analog găsim:

$$\frac{\sin^n(B+C)}{\sin^{2n}A}=\frac{h_a^n}{s^n}R^n,\quad \frac{\sin^n(C+A)}{\sin^{2n}B}=\frac{h_b^n}{s^n}R^n.$$

Deci:

$$\frac{\sin^n(A+B)}{\sin^{2n}C}+\frac{\sin^n(B+C)}{\sin^{2n}A}+\frac{\sin^n(C+A)}{\sin^{2n}B}=$$

$$\frac{h_c^n+h_b^n=h_c^n}{s^n}R^n.$$

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *André d'Albon* (lic. Naţional, Iaşi), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iaşi), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinu S. D-tru* (Şc. Conductori, Timişoara), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Iacob Şt. Eugen* (Botoşani), *Manolescu I. Nicolae* (Focşani), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Olteanu Nicu* (lie. Arad), *Pantzu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vladimirschi Veniamin* (lic. Tighina) şi *Zamfirescu Gh Ioan* (lic. Piteşti).

PROBLEME PROPUSE

549. — Să se găsiască un patrat perfect de cinci cifre, astfel ca prin suprimarea cifrelor extreme să rămână un cub perfect.

STAN I. AURELIAN.

550. — In triunghiul isoscel BAC ($AB=AC$), A', B', C' sunt picioarele înălţimelor AA', BB', CC'; $A'E$ este bisectoara unghiului $AA'C'$ şi $A'F$ a unghiului $AA'B'$.

In ce condiţiuni, pentru triunghiul BAC:

1°. $\widehat{EA'F}=\widehat{BAC}$.

2°. Triunghiul BEA' sau $A'FC$ e isoscel.

3°. Patrulaterul $AEA'F$ e un romb.

4°. Aria rombului $AEA'F$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor BEA' şi $A'FC$.

5°. Triunghiul $EA'F$ e echilateral.

6°. Unghiul $B'A'C'$ e drept.

ION PROTOPOPESCU

551. — Se dă triunghiul ABC. Fie B', B'' proecţiile lui B pe bisectoarea interioară şi pe bisectoarea exterioară a unghiului A, iar C', C'' proecţiile lui C pe aceleaşi bisectoare. Să se demonstreze că dreptele BC', CB' se întâlnesc pe bisectoarea exterioară a unghiului A, pe când dreptele BC'', CB'' se întâlnesc pe bisectoarea interioară a aceluiaşi unghiu.

COL. GH. BUICLIU

552. — Să se rezolve ecuaţia:

$$x^6-2x^4\sqrt{x}+2x^3-x\sqrt{x}=a.$$

TEODOR V. DIACONESCU.

553. — Dacă $f(x)=0$, are toate rădăcinele reale, atunci şi ecuaţia:

$$k^2[f''^2(x)+f'(x)f'''(x)]+k[f(x)f'''(x)+3f'(x)f''(x)]+f(x)f''(x)+f'^2(x)=0,$$

are toate rădăcinele reale.

NICOLAE I. MANOLESCU.

554. — Să se calculeze suma seriei:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{36n^2+48n+7}.$$

CORNELIU N. POPESCU.

555. — Să se stabilească identitatea:

$$10\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t-5\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t+\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(8k+2i+1)t=16\frac{\sin^6 2kt}{\sin t}.$$

V. ALACI

556. — Să se rezolve ecuaţia:

$$16\sin^8 2x-\sin 6x=(1-\cos 4x)^4+16\sin^5 2x-3\sin 2x$$

BARBULESCU TUDOR.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

A apărut „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 IULIE 1926 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. ZAPAN. O TEOREMA DE ARITMETICA.
2. NOTE MATEMATICE, 9.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 381, 389, 397, 405, 447, 456, 461.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunil problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

O TEOREMA DE ARITMETICA

de GH. ZAPAN

Teoremă. Punând:

$$p_1 = \varphi(p_0),\ p_2 = \varphi(p_1), \ldots,\ p_n = \varphi(p_{n-1}),$$

în care $\varphi(N)$ reprezintă numărul întregilor primi cu N și mai mici ca el, și știind că numerile p_{i-1} și $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sunt prime între ele, avem identitatea:

$$\begin{array}{lll} & & p_n \\ & & a_n + \alpha_n \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ a_3 + \alpha_3 & & \\ a_2 + \alpha_2 & a_2 + \alpha_2 & \\ a_1 & \equiv a_1 & \pmod{p_{n-1}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha_n + 1 \\ a_{n-1} + \alpha_{n-1} \end{array}$$

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ fiind numere întregi, pozitive sau negative.

Ținând seamă de condițiile impuse în enunț, după teorema lui *Fermat* generalizată de *Euler* putem scrie succesiv:

$$\begin{array}{ll} p_n & \\ a_n + \alpha_n & \equiv \alpha_n + 1 \pmod{p_{n-1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} p_n & & \\ a_n + \alpha_n & \mathcal{M} p_{n-1} + \alpha_n + 1 & \alpha_n + 1 \\ a_{n-1} + \alpha_{n-1} & \equiv a_{n-1} + \alpha_{n-1} & \equiv \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1} \end{array} \pmod{p_{n-2}}$$

$$\begin{array}{llll} p_n & & & \\ a_n + \alpha_n & & \alpha_n + 1 & a_n + 1 \\ a_{n-1} + \alpha_{n-1} & \mathcal{M} p_{n-2} + a_{n-1} + \alpha_{n-1} & & a_{n-1} + \alpha_{n-1} \\ a_{n-2} + \alpha_{n-2} & \equiv a_{n-2} + \alpha_{n-2} & & \equiv a_{n-2} + \alpha_{n-2} \end{array} \pmod{p_{n-3}}$$

. . . . . .

$$\begin{array}{lll} p_n & & \\ a_n + \alpha_n & & \alpha_n + 1 \\ & & a_{n-1} + \alpha_{n-1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_3 + \alpha_3 & a_3 + \alpha_3 & \\ a_2 + \alpha_2 & \equiv a_2 + \alpha_2 & \pmod{p_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} p_n & & \alpha_n + 1 \\ a_n + \alpha_n & & a_{n-1} + \alpha_{n-1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_2 + \alpha_2 & a_2 + \alpha_2 & \\ \text{(A)}\ a_1 & \equiv a_1 & \pmod{p_0} \end{array}$$

Teorema e deci demonstrată.

Observare. Dacă facem ca numerile $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, n$ să ia diferite valori particulare, formula generală de mai sus ne conduce la indentități remarcabile; astfel:

1. Fie $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = -1$.

In acest caz membrul al doilea din (A) se mai poate scrie succesiv:

$$\begin{array}{llllll} a_{n-1}^0 - 1 & & & & & \\ \cdot & a_{n-2}^0 - 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & a_{n-3}^0 - 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_2 - 1 & a_2 - 1 & a_2 - 1 & a_2^0 - 1 & & \\ a_1 & = a_1 & = a_1 = \ldots = a_1 & = a_1^0 = 1 \end{array}$$

așa că putem scrie următoarea identitate interesantă, aplicând formula (A):

$$\begin{array}{ll} p_n & \\ a_n - 1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_3 - 1 & \\ a_2 - 1 & \\ \text{(B)}\quad a_1 & \equiv 1 \pmod{p_0} \end{array}$$

Aplicație. Dacă facem:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 7 \quad \text{și} \quad p_0 = 17$$

vom avea: $p_1 = 16$, $p_2 = 8$, $p_3 = 4$, $p_4 = 2$, $p_5 = 1$, așa că punând:

$$n = 5$$

$$6$$

$$7^{7-1}$$

și:

$$7^{7-1}$$

$$7^{7-1}$$

$$7 \equiv x$$

după formula (B) vom avea:

$$x \equiv 1 \pmod{17}.$$

Dacă facem: $p_0 = 23$, găsim: $p_5 = 1$;
Avem dar:

$$x \equiv 1 \pmod{23}$$

La fel găsim:

$$x \equiv 1 \pmod{25}$$

$$x \equiv 1 \pmod{31}$$

$$x \equiv 1 \pmod{32}$$

$$x \equiv 1 \pmod{37}$$

$$x \equiv 1 \pmod{39}$$

$$x \equiv 1 \pmod{81}$$

Așa dar avem:

$$x \equiv 1 \pmod{M}$$

M fiind cel mai mic multiplu comun al numerilor: 17, 23, 25, 31, 32, 37, 39, 81; adică:

$$M = 2^5 . 3^4 . 5^2 . 13 . 17 . 23 . 31 . 37 = 377797024800$$

adică:

$$6$$

$$7^{7-1}$$

$$7^{7-1}$$

$$7 \equiv 1 \pmod{377797024800}.$$

2. Fie acum:

$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = -a_{n-1} + 1,$$

$$a_{n-2} = -a_{n-2} + 1, \ldots a_2 = -a_2 + 1.$$

Observăm ca mai sus că membrul al doilea din (A) devine:

$$a_{n-1} - a_{n-1} + 1 \quad a_{n-2} - a_{n-2} + 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_2 - a_2 + 1 \qquad a_3 - a_2 + 1 \qquad a_2 - a_2 + 1$$

$$a_1 \qquad = a_2 \qquad = \ldots = a_1 \qquad = a_1$$

așa că putem scrie idenitatea:

$$p_n$$

$$a_n$$

$$a_{n-1} - a_{n-1} + 1$$

$$\vdots$$

$$a_2 - a_2 + 1$$

(C) $$a_1 \equiv a_1 \pmod{p_0}.$$

Aplicație. Dacă luăm datele aplicate formulei (B), aci găsim:

$$7$$

$$7^{7-6}$$

$$7^{7-6}$$

$$7^{7-6}$$

$$7 \equiv 7 \pmod{377797024800}.$$

3. Să facem în formula (A), $n = 2$, $a_2 = 0$; și obținem:

$$p_2$$

(D) $$a_2$$

$$a_1 \equiv a_1 \pmod{p_0}.$$

Aplicație. Fie: $a_1 = a_2 = 7$.

Dacă dăm lui p_0 succesiv valorile: 17, 25, 31, 32, obținem pentru p_2 o valoare constantă și egală cu 8.

Avem dar:

$$8$$

$$7^{7} \equiv 7 \pmod{17 . 25 . 31 . 32}.$$

$$8$$

$$\therefore \quad 7^{7} \equiv 7 \pmod{421600}.$$

4. Intrebuințând notațiile amintite, avem evident:

$$p_1 \leqq p_0 - 1$$

$$p_2 \leqq p_1 - 1$$

$$p_3 \leqq p_2 - 1$$

$$\ldots\ldots$$

$$p_n \leqq p_{n-1} - 1$$

şi adunând membru cu membru aceste inegalităţi obţinem :

$$p_n \leq p_0 - n.$$

Dacă facem :

$$n = p_0 - 1,$$

avem :

$$p_n \leq 1,$$

adică $p_n = 1$ sau $p_n = 0$.

Pentru $p_n = 1$, formula (B) devine :

$$(1) \qquad \begin{matrix} a_n - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv 1 \pmod{p_0}.$$

Dacă $p_n = 0$, trebue să existe un număr r, astfel ca :

$$p_r = 1 \qquad (r < n).$$

Şi atunci formula (B) ne dă :

$$\begin{matrix} a_r - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv 1 \pmod{p_0}$$

şi dacă în această identitate facem :

$$\begin{matrix} a_n - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{r+1} - 1 \\ a_r = a'_r \end{matrix}$$

ea devine analoagă cu cea din (1).

Aşa dar relaţiunea (1) e adevărată pentru $p_n = 1$ şi pentru $p_n = 0$. Deci făcând $n = p_0 - 1$, am văzut mai sus că $p_n = 1$ sau $p_n = 0$ şi relaţiunea (1) devine :

$$(E) \qquad \begin{matrix} a_{p_0-1} - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv 1 \pmod{p_0}.$$

Considerând formula (C) în chip analog se arată că :

$$(F) \qquad \begin{matrix} a_{p_0-1} \\ a_{p_0-2} - a_{p_0-2} + 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - a_2 + 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv a_1 \pmod{p_0}$$

5. Dacă în formula (E) facem :

$$\begin{matrix} a_k - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{p_0} - 1 \\ a_{p_0-1} = a'_{p_0-1} \end{matrix} \qquad (k \geq p_0 - 1)$$

rezultă :

$$\begin{matrix} a_k - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv 1 \pmod{p_0}$$

Însemnând cu E primul membru al acestei identităţi, putem spune.

Dacă $a_1, a_2, \ldots a_k$ sunt numere prime mai mari ca numărul întreg $k+1$, expresiunea E divizată prin orice număr întreg şi pozitiv p_0 mai mic sau egal decât $k+1$ ne dă restul 1.

Adică avem :

$$\begin{matrix} E \equiv 1 \pmod{2} \\ E \equiv 1 \pmod{3} \\ \cdots \\ E \equiv 1 \pmod{k+1} \end{matrix}$$

şi însemnând cu M_{k+1} cel mai mic multiplu comun al numerilor $2, 3, \ldots k+1$, vom avea :

$$(G) \qquad \begin{matrix} a_k - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 - 1 \\ a_1 \end{matrix} \equiv 1 \pmod{M_{k+1}}.$$

Considerând formula (C) la fel se arată că :

$$a_k$$
$$a_{k-1} - a_{k-1} + 1$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$a_2 - a_2 + 1$$

(H) $$a_1 \equiv a_1 \pmod{M_{k+1}}.$$

Aplicație. Dacă facem $k = 6$ și:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_6 = 11$$

avem: $M_{k+1} = M_7 = 2^2 . 3 . 5 . 7 = 420$
de unde:

$$10$$
$$11 - 1$$
$$11 - 1$$
$$11 - 1$$
$$11 - 1$$
$$11 \equiv 1 \pmod{420}.$$

NOTE MATEMATICE

9. *Asupra unor relațiuni.*

In cele ce urmează îmi propun să arăt cum putem găsi relațiuni noi, între diferitele elemente ale unui triunghiu, cu ajutorul relațiunilor ce există între rădăcinile și coeficienții unei ecuațiuni de gr. III-a.

Fie ecuația:

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2 x_3.

Se știe că avem relațiunile:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \alpha,\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \beta,\ x_1 x_2 x_3 = \gamma.$$

Insă în afară de aceste relațiuni se mai cunosc și următoarele:

(1) $\Sigma x_1^2 = \alpha^2 - 2\beta$: (2) $\Sigma x_1^2 x_2 = \alpha\beta - 3\gamma$

(3) $\Sigma x_1^2 x_2^2 = \beta^2 - 2\alpha\gamma$: (4) $\Sigma x_1^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$

Facem pe $x_1 = \frac{1}{h_a}$: $x_2 = \frac{1}{h_b}$: $x_3 = \frac{1}{h_c}$ și avem:

$$\sum \frac{1}{h_a} = \frac{p}{S};\ \sum \frac{1}{h_a h_b} = \frac{\varphi}{4S^2}$$

(unde $\varphi = p^2 + 2^2 + 4Rr$) ; $\frac{1}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2S^2}$.

Ținând seama însă de relațiunile indicate la început, avem:

(5) $$\sum \frac{1}{h_a^2} = \left(\frac{1}{2S^2}\right)(2p^2 - \varphi)$$

(6) $$\sum \frac{1}{h_a^2 h_b} = \left(\frac{p}{4S^3}\right)(\varphi - 6Rp)$$

(7) $$\sum \frac{1}{h_a^2 h_b^2} = \left(\frac{1}{16S^4}\right)(\varphi^2 - 16RSp)$$

(8) $$\sum \frac{1}{h_a^3} = \left(\frac{p}{4S^3}\right)(4p^2 - 3\varphi + 6Rr)$$

Tot așa pentru unghiuri facem pe $x_1 = \sin B$:

$x_2 = \sin B$; $x_3 = \sin C$; și avem:

$$\sum \sin A = \frac{p}{R};\ \sum \sin A . \sin B = \frac{\varphi}{4R^2};$$

$$\sin A . \sin B . \sin C = \frac{S}{2R^2}$$

Calculând mai departe, cu ajutorul relațiunilor (1), (2), (3), (4), vom găsi iarăși o serie nouă de relațiuni analoage cu cele dela numerile (5), (6), (7), (8) și numai cu deosebirea că în locul lui R din relațiunile (5), (6), (7), (8), vom avea S, iar în locul lui S, tot din relațiunile indicate vom avea acuma R.

In modul acesta putem găsi o mulțime de relațiuni între elementele unui triunghiu. Tot așa putem găsi relațiuni noi, făcând diferite combinațiuni între elementele unui triunghiu sau între elementele unui triunghiu și razele cercurilor exînscrise triunghiului, deoarece acestea fiind în număr de 3, corespund tocmai celor 3 rădăcini ale ecuației noastre. Așa între unghiuri și înălțimi avem:

$$\Sigma h_a \sin A = \frac{3S}{R};\ \Sigma h_a \sin A . h_b \sin B = \frac{3S^2}{R^2}:$$

$$\Pi h_a \sin A = \frac{S^3}{R^3}$$

sau calculând mai departe găsim:

$$\Sigma h_a^2 . \sin^2 A = (3S^2)\left(\frac{1}{R^2}\right):$$

$$\Sigma h_a^2 \sin^2 A . h_b \sin B = (6S^3)\left(\frac{1}{R^3}\right):$$

$$\Sigma h_a^2 \sin^2 A . h_b^2 \sin^2 B = (3S^4)\left(\frac{1}{R^4}\right):$$

$$\Sigma h_a^3 \sin^3 A = (3S^3)\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

DUMITRESCU GH. MARIN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 10, Iunie 1926, Sur les triangles de M. *N. Blaha*, *N. Agronof*. Asupra unei inegalităţi, *Şerban A. Gheorghiu*. Cuburi terminate cu rădăcina lor, *E. Ştefănescu*.

3. *Curierul Matematic* (litografiat), N-rile 4—5, vol. II, Iunie şi Iulie 1926. Asupra unor puncte colineare, *Tib. Popovici*. O categorie de relaţii trigonometrice *I. C. Vasiliu*. Relaţii în legătură cu un patrulater, *Corneliu Popescu*.

3. *Ziarul Matematic* (litografiat), an. I, No. 6, Iunie 1926. Spaţiul cu *n* dimensiuni, *Vulpanovici Boris*.

4. *Sopra una classe di sistemi analonomi*, nota di *Giorgio Vrânceanu*.

5. *Sul teorema di Dirichlet*, nota di *Giorgio Vrânceanu*.

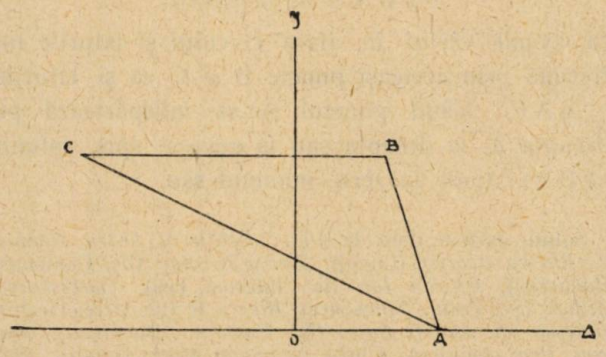
PROBLEME REZOLVATE

381. — *Să se studieze variaţia unghiului* B A C, *când* A *se mişcă pe o dreaptă dată din planul* A B C, *punctele* B *şi* C *fiind fixe. Discuţie.*

V. VÂLCOVICI

Vom considera mai multe cazuri.

1°. *Punctele* B, C *sunt astfel că* B C *e paralelă cu dreapta* Δ, *pe care se găseşte vârful* A.



Alegem ca axe, Δ axa abscizelor şi o perpendiculară pe mijlocul lui B C ca axă a ordonatelor. Luăm pe A într'o poziţie oarecare pe Δ, coordonatele punctelor B, C şi A sunt:

$$B(b,\ a),\quad C(-b,\ a),\quad A(x,\ 0).$$

Dacă notăm, $\sphericalangle BAC = \varphi$, atunci ştim că:

$$(1)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{m - m'}{1 + m\,m'},$$

m, m' fiind coeficienţii unghiulari ai dreptelor B A şi C A, ale căror valori sunt:

$$m = \frac{a}{x - b},\quad m' = \frac{a}{x + b}.$$

Inlocuind în (1) obţinem:

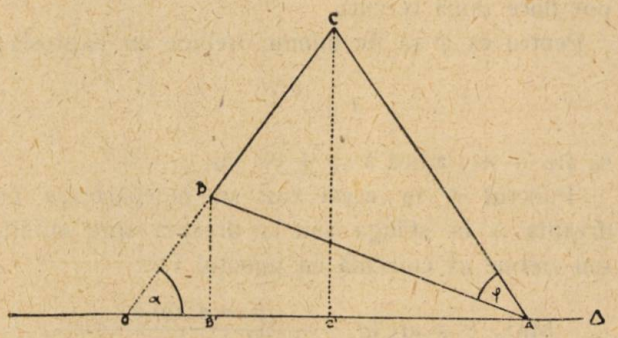
$$(2)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{a}{x-b} - \dfrac{a}{x+b}}{1 + \dfrac{a^2}{x^2 - b^2}} = \frac{2ab}{x^2 + a^2 - b^2}.$$

Din relaţiunea (2) vedem uşor, că maximul lui φ are loc pentru $x = 0$, adică când punctul A este în origină, iar minimul lui φ are loc, pentru $x = \pm\infty$, adică când punctul A se îndepărtează pe dreapta Δ la stânga sau la dreapta, spre infinit:

$$\text{Max. } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2ab}{a^2 - b^3}$$

$$\text{Min. } \varphi = 0.$$

2°. *Punctele* B, C *sunt de aceiaşi parte a dreaptă* Δ, *dar astfel că* B C *prelungită întâlneşte pe* Δ.



Insemnăm, $\sphericalangle COA = \alpha$, $\sphericalangle CAB = \varphi$, $OB = a$ $OC = b$, $OA = x$.

Putem scri:

$$(1)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(OAC - OAB) = \frac{\operatorname{tg}\widehat{OAC} - \operatorname{tg}\widehat{OAB}}{1 + \operatorname{tg}\widehat{OAC}\operatorname{tg}\widehat{OAB}}$$

Dar:

$$\operatorname{tg}\widehat{OAC} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{b\sin\alpha}{x - b\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\widehat{OAB} = \frac{BB'}{AB'} = \frac{a\sin\alpha}{x - b\cos\alpha}$$

$$(2)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{a\sin\alpha}{x - b\cos\alpha} - \dfrac{a\sin\alpha}{x - a\cos\alpha}}{1 + \dfrac{ab\sin^2\alpha}{(x - b\cos\alpha)(x - a\cos\alpha)}} =$$

$$\frac{(b-a)\,x\sin\alpha}{x^2 - (a+b)\,x\cos\alpha + ab} = \frac{(b-a)\sin\alpha}{x - (a+b)\cos\alpha + \dfrac{ab}{x}}$$

E clar că φ este maxim, când expresia:

$$(3)\qquad x + \frac{ab}{x},$$

este minimă, şi cum produsul acestor termeni e constant, suma (3) e minimă, când termenii ei sunt egali, adică când:

$$x = \frac{ab}{x}$$

$$\therefore\quad x = \pm\sqrt{ab}$$

φ este deci maxim când vârful A este aşezat pe Δ la dreapta sau la stânga lui O, la o distanţă, medie proporţională între segmentele a şi b. Punctul A este deci punctul de tangenţă a unui cerc tangent la Δ ce trece prin B şi C; ştim că se pot duce două cercuri.

Pentru ca φ să fie minim, trebuie ca expresia:

$$x + \frac{ab}{x}$$

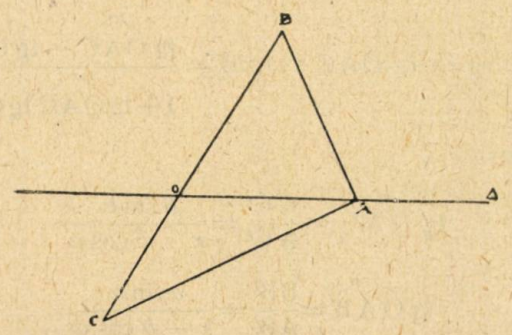
să fie $\pm\infty$, adică $x = \pm\infty$ sau $x = 0$.

Punctul A în acest caz se îndepărtează pe dreapta Δ la stânga sau la dreapta spre infinit, sau trebue să coincidă cu punctul O:

$$\text{Max. } \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{(b-a)\sin\alpha}{\pm 2\sqrt{ab} - (a+b)\cos\alpha}$$

$$\text{Min. } \varphi = 0.$$

3°. *Punctele* B, C *cuprind dreapta* Δ.



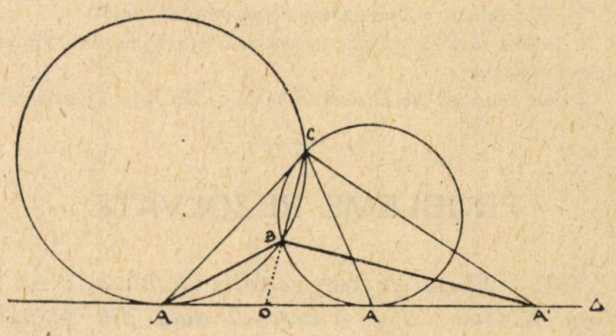
In acest caz, e uşor de văzut că dacă punctul A coincide cu O avem un maxim:

$$\text{Max. } \sphericalangle\varphi = 180^\circ;$$

iar dacă A se îndepărtează pe Δ la stânga sau la dreapta spre infinit, avem un minim:

$$\text{Min. } \varphi = 0.$$

Soluţie geometrică. Considerăm numai cazul când punctele B *şi* C *sunt de o singură parte a dreptei* Δ.



Descrim cele două cercuri tangente la Δ şi trecând prin punctele B şi C. Evident că punctele de tangenţă A, sunt astfel că $\sphericalangle BAC$ este maxim, căci dacă am lua ori care alt punct pe Δ, A′ de exemplu, atunci

$$\sphericalangle BA'C < \sphericalangle BAC,$$

ca având vârful în afara cercului şi laturile lui trecând prin aceleaşi puncte B şi C ca şi laturile $\sphericalangle BAC$. Când punctul A se indepărtează pe dreapta Δ, la dreapta sau la stânga spre infinit, $\sphericalangle BAC$ tinde la zero, minimul său.

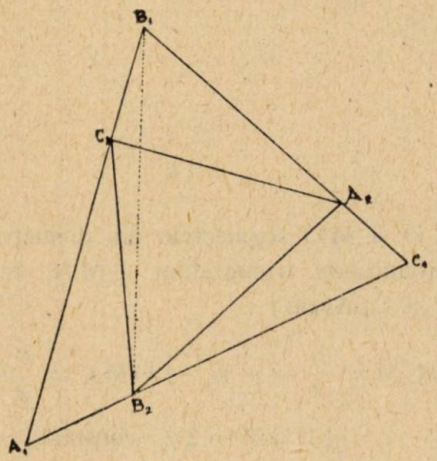
Soluţii parţiale date de d-nii: *Beldie N. D-tru*, *Berdan C*, *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Marini Paul* (student, Cluj), *Neumann Maria* (Lugoj), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Popovici Th. Ion* (Şc. Politechnică), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Zornesti), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Ştefănescu Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (Şc. Polit., Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

389. — *Se dă un triunghiu oarecare* $A_1B_1C_1$. *Fie* A_2, B_2, C_2 *trei puncte care împart laturile triunghiului dat în raportul* $\frac{1}{k}$ *şi în acelaş sens,* k *fiind pozitiv şi supra unitar. Pe laturile tri-*

unghiului $A_2\ B_2\ C_2$ *se iau punctele* A_3, $B_3\ C_3$, *cari le împart în raportul* $\frac{1}{k}$ *şi în acelaşi sens cu cel de sus, etc. Ştiind că suma pătratelor laturilor triunghiului dat e* L^2, *să se calculeze:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{A_i B_i}^2 + \overline{A_i C_i}^2 + \overline{B_i C_i}^2\right)$$

R. B. POPA-RADULET



Notăm pentru prescurtare:

$$A_1 B_1 = c,\ B_1 C_1 = a,\ C_1 A_1 = b$$

Să unim pe B_1 cu B_2. In triunghiul $A_1\ B_1\ C_1$, conform teoremei lui *Stewart*.

(1) $c^2\ B_2 C_1 + a^2\ A_1 B_2 = \overline{B_1 B_2}^2 . b + b . A_1 B_2 . B_2 C_1$,

Dar din ipoteză:

$$\frac{A_1 B_2}{B_2 C_1} = \frac{1}{k},\ \text{de unde}\ k . A_1 B_2 = B_2 C_1,$$

apoi se vede că:

$$A_1 B_2 + B_2 C_1 = b,\ \text{deci:}$$

$$A_1 B_2 (1+k) = b \ *^*_* \ B_2 C_1 \frac{b}{1+k} = b,$$

şi înlocuind în (1) avem:

$$c^2\ B_2 C_1 + a^2 \frac{B_2 C_1}{k} =$$

$$\overline{B_1 B_2}^2 . B_2 C_1 \frac{1+k}{k} + b . B_2 C_1 \frac{b}{1+k}$$

$$*^*_* \ c^2 + \frac{a^2}{k} = \overline{B_1 B_2}^2 \frac{1+k}{k} + \frac{b^2}{1+k},$$

de unde:

(2) $$\overline{B_1 B_2}^2 = \frac{a^2(1+k) - b^2 k + c^2(1+k)k}{(1+k)^2}$$

In triunghiul $B_1 B_2 C_1$, conform teoremei lui *Stewart*, avem:

(3) $$\overline{B_1 B_2}^2 . A_2 C_1 + \overline{B_2 C_1}^2 . B_1 A_2 =$$

$$\overline{B_2 A_2}^2 . a + a . B_1 A_2 . A_2 C_1.$$

Dar din ipoteză;

$$\frac{C_1 A_2}{A_2 B_1} = \frac{1}{k},\ \text{de unde:}\ k . C_1 A_2 = A_2 B_1,$$

apoi se vede că:

$$B_1 A_2 + A_2 C_1 = a,\ \text{deci:}$$

$$A_2 C_1 (1+k) = a,\ *^*_* \ B_1 A_2 \frac{1+k}{k} = a,$$

şi înlocuind în (3) obţinem:

$$\overline{B_1 B_2}^2 . A_2 C_1 + \frac{k^2 b^2}{(1+k)^2} . k\ A_2 C_1 =$$

$$\overline{B_1 A_2}^2 . A_2 C_1 (1+k) + a . A_2 C_1 . \frac{a k}{1+k}$$

$$*^*_* \ \overline{B_1 B_2}^2 + \frac{k^3 b^2}{(1+k)^2} - \frac{k a^2}{1+k} = \overline{B_2 A_2}^2 (1+k)$$

Ţinând seamă de (2) putem scri încă:

$$\frac{a^2(1+k) - b^2 k + c^2(1+k)k}{(1+k)^2} +$$

$$\frac{b^2 k^3}{(1+k)^3} - \frac{a^2 k}{1+k} = \overline{B_2 A_2}^2 (1+k)$$

De aci deducem:

$$\overline{A_2 B_2}^2 = \frac{a^2(1-k) - b^2 k(1-k) + c^2 k}{(1+k)^2}$$

Analog găsim:

$$\overline{B_2 C_2}^2 = \frac{b^2(1-k) - c^2 k(1-k) + a^2 k}{(1+k)^2},$$

$$\overline{C_2 A_2}^2 = \frac{c^2(1-k) - a^2 k(1-k) + b^2 k}{(1+k)^2}$$

Atunci, rezultă că:

$$\overline{A_2 B_2}^2 + \overline{B_2 C_2}^2 + \overline{C_2 A_2}^2 =$$

$$\frac{L^2[1-k-k(1-k)+k]}{(1+k)^2} = L^2 \frac{k^2-k+1}{(1+k)^2}$$

Vedem dar că, suma patratelor laturilor unuia din triunghiurile $A_i B_i C_i$ *este egală cu suma patratelor laturilor triunghiului precedent* $A_{i-1} B_{i-1} C_{i-1}$, *înmulțit cu factorul,* $\frac{k^2-k+1}{(1+k)^2}$.

Deducem de aci, că:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_i B_i}^2 + \overline{B_i C_i}^2 + \overline{C_i A_i}^2) =$$

$$\lim_{n=\infty} L^2 \left[1 + \frac{k^2-k+1}{(1+k)^2} + \frac{(k^2-k+1)^2}{(1+k)^4} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(k^2-k+1)^{n-1}}{(1+k)^{2(n-1)}} \right] =$$

$$L^2 \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{k^2-k+1}{k^2+2k+1}\right)^n - 1}{\frac{k^2-k+1}{k^2-2k+2} - 1} = \frac{L^2 (1+k)^2}{3k},$$

întrucât termenul, $\left(\frac{k^2-k+1}{k^2+2k+1}\right)^n$ tinde către zero.

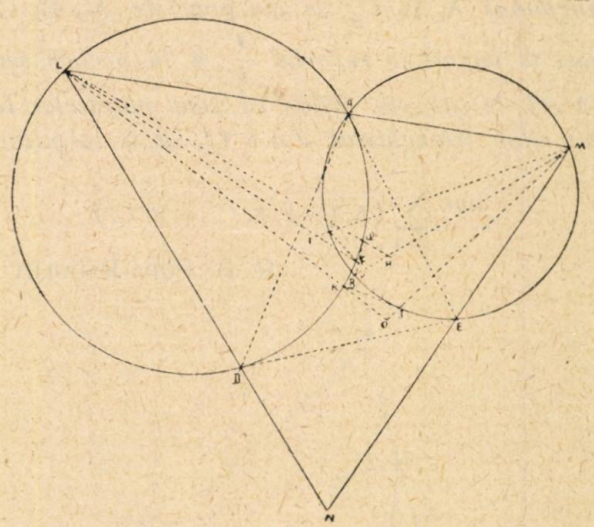
Soluții date de d-nii: *Berdan C.* (București), *Bercovici Sigmund* (lic. Pitești), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Neumann Maria* (Lugoj), *Popovic Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ștefănescu Emil* (Șc. Polit., București), *Tarăbuța C. Paul* (Șc. Polit., București) și *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București).

397. — *Se dau două cercuri secante în* A *și* B. *O secantă mobilă trecând prin* A *taie a doua oară cercurile în* L *și* M; *pe* L M *se construește un triunghiu* L M N *asemenea cu un triunghiu dat. Să se afle locul punctului* N *precum și locurile centrului cercului circumscris, înscris și ortocentrului triunghiului* L M N, *când secanta* L M *se rotește în jurul punctului* A.

DILI. C. SCHILERU

Fie α, β, γ unghiurile triunghiului dat. Construim triunghiul L M N astfel ca $\sphericalangle L = \alpha$, $\sphericalangle M = \beta$ și $\sphericalangle N = \gamma$. Dreapta L N taie a doua oară cercul în D, punctul D e fix fiindcă unghiul L e constant și punctul A e fix, analog punctul E.

Rezultă că locul punctului N este un segment de cerc capabil de unghiul γ descris pe dreapta D E.



Fie L O și M O segmentele din diametrele cercului circumscris triunghiului L M N, care trec prin M și L. Avem;

$$\sphericalangle OLM = \frac{\pi}{2} - \gamma \text{ și } \sphericalangle OML = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\therefore \sphericalangle LOM = 2\gamma \text{ (constant)},$$

însă punctele K și J unde L O și M O taie respectiv a doua oară cercurile sunt fixe, căci $\sphericalangle OLM$ și $\sphericalangle OML$ sunt constante, iar punctul A e fix. Rezultă că locul punctului O este un segment de cerc capabil de 2γ descris pe dreapta K J.

Fie L I și M I segmentele din bisectoarele unghiurilor L și M, ele taie cercurile respectiv în F și G, cari sunt puncte fixe, căci;

$$\sphericalangle ILM = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle IML = \frac{\beta}{2}$$

și A e fix, atunci din triunghiul M I L, avem $\sphericalangle GIF = \frac{\alpha+\beta}{2}$ (constant), și urmează că locul I (i) al centruiui cercului înscris triunghiuiui L M N este un segment de cerc capabil de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ descris pe dreapta F G

Fie L H și M H segmentele din înălțimele vârfurilor L și M a triunghiului L M N, ele taie cercurile respectiv în Q și P, care sunt puncte fixe. Pentrucă $\sphericalangle HML = \frac{\pi}{2} - \alpha$ și $\sphericalangle HLM = \frac{\pi}{2} - \beta$, deci $\sphericalangle PHQ = \alpha + \beta$ (constant), urmează că locul punctului H ortocentrul triunghiului L M N este

un segment de cerc capabil de $\alpha + \beta$, descris pe dreapta P Q.

Observare. Chestiunea se poate generaliza pentru un punct oare care ale cărui ceviene din vârfurile L şi M ale triunghiului L M N, fac unghiuri cu L M, care să se exprime în funcţie de unghiurile constante α, β, γ şi în aceste cazuri locurile acestor puncte sunt tot segmente de cerc.

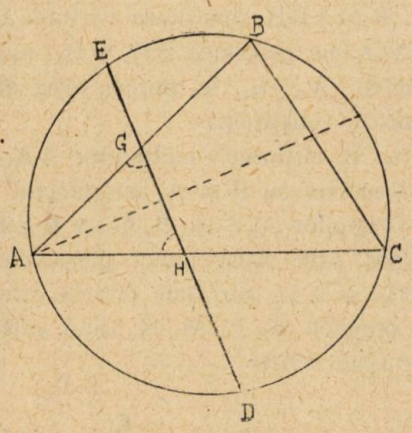
Soluţii date de d-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Berdan I. C.* (Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nestor Gh. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Popovici Th. Ioan, Segârceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Zamfirescu Gh. Ioan.*

405. — *Se dă triunghiul* A B C *înscris în cercul* O. *Se ia punctul* D *pe arcul* A C *şi* E *pe arcul* A B, *astfel ca:*

$$\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{EB}.$$

Să se dovedească că bisectoarea unghiului A *este perpendiculară pe* E D.

V. ALACI



Fie G, H punctele unde dreapta E D taie laturile A C şi A B.

Relaţia dată o mai putem scri:

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{DC} \tag{2}$$

Observăm însă, că:

$$\text{măs.} \sphericalangle G = \text{măs.} \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{EB}}{2}$$

$$\text{măs.} \sphericalangle H = \text{măs.} \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{DC}}{2},$$

şi în virtutea relaţiei (2), rezultă:

$$\sphericalangle G. = \sphericalangle H,$$

adică triunghiul A H G este isoscel şi să ştie în acest caz că bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe bază.

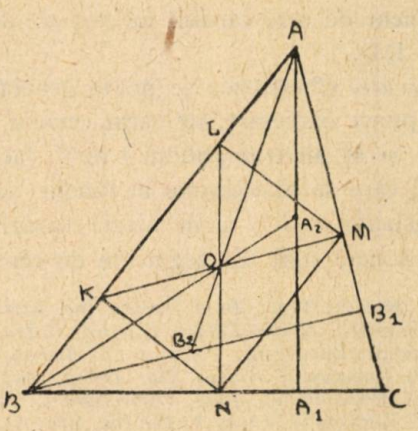
Bisectoarea unghiului A este deci perpendiculară pe G H sau E D.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Semin. Pedag., Iaşi), *Albulescu I. Ion* (lic. Târgovistea), *Antonescu Gh. Gheorghe* (lic. Botoşani), *Aposteanu Ioan* (lic. Timişoara), *Ardelean Radu* (lic. milit., Craiova), *Atanasiu C.*, *Avramescu T. Ion* (lic. Caracal), *Băncilă Mircea* (Braşov), *Beldie N. D-tru, Bercovici Sigmund* (lic. Piteşti), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Caracostea A.*, *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Cernes Mony* (lic. Naţional, Iaşi), *Chinie Mihail* (lic. Piteşti), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Chiser Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Cojoc N. Gh.* (lic. Piatra-Neamţ), *Constantinescu C. Marius* (lic. Slatina), *Corsoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu.), *Cosma Z. Gheorghe* (Bucureşti), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Curcubată Dionisie, Daraban Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Dărmănescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Deoanca Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin, Dimitrescu Mişu* (lic. Roman), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dragomir Nicolae* (lic. Arad), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Dugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu I. Gostavăţu* (lic. Caracal), *Fezi E. Gh.* (lic. Orhei), *Florea* C. *Alex.* (lic. Internat, Iaşi), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Frumuşelu Gh.* (Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu Gh. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Giurgiu Viorel* (Deva), *Goldstein N.* (Cetatea Albă), *Grabowskii* (lic. Orhei), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Handjief V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Hart Lazăr* (lic. Galaţi), *Hătăran D. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Iacob Şt. Eugen* (Botoşani), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Iliovici Gh. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ioachim Grigore* (lic. Mil., Iaşi), *Ionescu N. Alexandru* (lic. Târgovişte), *Ionescu Th. Bujor Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu Anton* (lic. Mil., Craiova), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Iuliu* (lic. Giurgiu), *Ionescu Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Piteşti), *Ionescu A. Ştefan* (lic. Buzeşti, Craiova), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Lateş Vasile* (Semin. Pedag., Iaşi), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul),

Lepădatu I. Victor (lic. Internat, Iaşi), *Manoil Eugen* (Maior din Artiterie), *Manoil A. Roman*, *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Meierovici F.* (lic. Focşani), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Mihailescu A. C.* (lic. Internat, Iaşi), *Mihailescu Tase* (lic. Braşov), *Milculescu G. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Milner I.*, *Mirică V. Theodor* (lic. Buzău), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Moroianu I. A.* (Constanţa), *Motaş C.* (Bucureşti), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Nădejde C.*, *Neacsu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Niţă D. Mihail* (lic. Târgovişte), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Olariu T. Enea* (Şc. Polit., Timişoara), *Pascariu Alexe* (Şc. Polit., Timişoara), *Pasco Wilhelm* (Bucureşti), *Patriciu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Păunescu D. Tr.* (lic. Piteşti), *Păslaru I. N.* (lic. R.-Sărat), *Petrescu Şt. Alex. Dan* (lic. Milit., Craiova), *Podariu Alex.* (lic. Piatra-Neamţ), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popescu I. Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popluca Mircea* (lic. Arad), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Purdilă C.* (lic. Braşov), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Rămniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Romaşcan C. Ştefan* (lic. Focşani), *Rotaru N. Barbu* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Serban Aurel* (lic. Braşov), *Serghei von-Ern* (Şc. P. T. T. Timişoara), *Socaciu N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Spacu Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Stamatiu I. M.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stănescu A. Amărăşti* (lic. Milit., Dealu), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stoian I.* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Taraş Vusile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ulea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vasiliu Gh. Nicolae* (lic. Focşani), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Zamfirescu Ion* (lic. Buzeşti, Craiova) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

447. — *Se dă triunghiul* A B C. *Să se construiască: 1°. un paralelogram* K L M N *având* K *şi* L *pe* A B, M *pe* A C, N *pe* B C *şi ştiind că diagonalele sunt perpendiculare pe* B C *şi* A C; *2°. un romb cu aceiaşi poziţie a vârfurilor, având o diagonală perpendiculară pe* B C *sau* A C.

P. TROFINOV



1°. Presupunem problema rezolvată şi fie K L M N paralelogramul căutat, O punctul de intersecţie al diagonalelor. Ţinând seamă de condiţiile problemei, trebuie să avem:

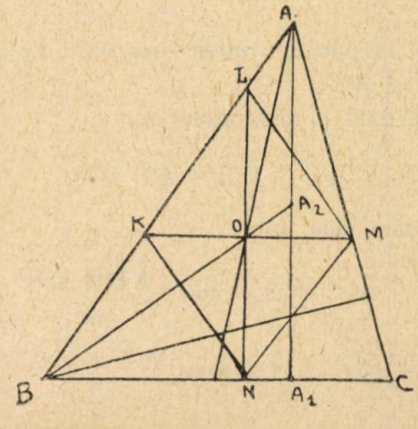
$$LN \perp BC \text{ şi } LO = ON,$$

de unde urmează: $LN \parallel AA_1$, (înălţimea vârfului A) şi că dreapta B O taie înălţimea AA_1 în mijlocul ei, A_2. Tot astfel:

$$KM \perp AC \text{ şi } KO = OM,$$

de unde: $KM \parallel BB_1$ (înălţimea vârfului B) şi deci dreapta A O taie înălţimea BB_1 în B_2, mijlocul ei. Dar punctele A_2, B_2 le putem avea direct, de unde urmează construcţia:

Luăm A_2, B_2 mijloacele înălţimilor AA_1 şi BB_1, le unim respectiv cu B şi A, iar punctul de intersecţie al dreptelor A_2B şi B_2A va fi punctul O. Ducem apoi prin acest punct perpendiculare la laturile B C şi A C, cari taie laturile triunghiului A B C în punctele K, L, M, N, fiind vârfurile paralelogramului cerut.



2°. K L M N fiind un romb, trebuie ca L O = O N, K O = O M şi fiindcă L N ⊥ B C şi deci şi pe A A_1 rezultă că B O este mediana triunghiului A B A_1 şi A O mediana triunghiului A B C. Punctul O este deci intersecţia medianei B A_1, a triunghiului A B A_1 şi a medianei din A a triunghiului A B C. Ducem prin O perpendiculare pe B C şi A A_2, găsim vârfurile K, L, M, N a rombului cerut.

Soluţii date de D-ra: *Blasko Beatrix* (Lugoj) şi de D-nii: *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedagogic, Bucureşti), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Feldstein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic Piteşti), *Ierimia Petru* (lic. Timişoara), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Manolescu I. Niculae* (Focşani), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focşani), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamţ), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici A., Segal I. Leon* (lic. Botoşani), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iaşi) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

456. — *Pentru numerotarea paginelor unei cărţi s'au întrebuinţat 6322 caractere. Ştiind că între paginele 10 şi 99 există 7 foi care nu sunt numerotate decât pe o faţă şi 5 foi cari nu sunt numerotate de loc şi că între paginele 99 şi 999 sunt 21 foi numerotate numai pe o faţă şi 15 nenumerotate de loc, se cere numărul foilor acelei cărţi.*

E. RESNOVEANU.

Paginarea dela 1 la 10, necesită 9 caractere
„ „ 10 „ 100, „ 180 „
„ „ 100 „ 1000, „ 2700 „

Rezultă că dela 1 la 999 inclusiv avem nevoe de:

$$9 + 180 + 2700 = 2889, \text{ caractere.}$$

Din 2889 trebue însă să scădem numărul caracterelor paginele nenumerotate, care după cum reiese din enunţ, sunt:

$$7 \times 2 = 14$$
$$5 \times 2 \times 2 = 20$$
$$21 \times 3 = 63$$
$$15 \times 2 \times 3 = 90,$$

total 187 caractere care scăzute din 2889 ne dă 2702.

Pentru numerotarea până la 999 inclusiv s'au folosit 2702 caractere; restul de:

$$6322 - 2702 = 3620,$$

se folosesc pentru numerotarea paginelor de patru cifre, cu care se pot numerota:

$$3620 : 4 = 905,$$

pagini. Cu cele 6322 caractere, s'au paginat deci:

$$999 + 905 = 1904,$$

pagini sau 952 foi.

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu I. Ioan* (lic. Caracal), *Bârs Petru* (lic. Sibiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis B.* (Şc. Polit., Timişoara) *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat). *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Ciocoiu Laurenţiu* (lic. Braşov), *Cocea G. N.* (lic. Piteşti), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara). *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dina N.* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Drăgan Gheorghe* (lic. Braşov), *Dravăţ I.* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Dumitrescu I. Gostavăţ* (lic. Caracal), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol Craiova), *Foca Ilie, Gavrilescu I. N.* (lic. Ploeşti), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Grigore Ion* (lic. Piteşti), *Grubenman I. Grigore* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Hart Lazăr* (lic. Galaţi), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoşani), *Iancu H. David* (lic. Naţional, Iaşi), *Iliuţă-Dăbuleni I. Ion* (lic. Caracal), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu M. I.* (Corabia), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Motculescu M. Ştefan* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit. Craiova), *Nicolescu I. Emil* (lic. Ploeşti), *Niculescu St. Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Patron Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Păslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Podariu Alex.* (lic. P.-Neamţ), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Tg.-Mureş), *Popovici P. Gh.* (lic. P.-Neamţ), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rapaport A.* (lic. Botoşani), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Scripcă C. Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Sfinţescu T. Duiliu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Sigall Louis* (lic. Naţionai, Iaşi), *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (lic, Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Theodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureş), *Troia L.* (lic. R.-Sărat). *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bocureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boris* (Chişinău) şi *Zamfirescu Ioan* (lic. Buzeşti), Craiova).

461. — *Să se arate că:*

$$\frac{n+1}{2} + n\cos t + (n-1)\cos 4t + \ldots$$
$$\ldots + 2\cos 2(n-1)t + \cos 2nt = \frac{\sin^2(n+1)t}{2\sin^2 t}$$

V. ALACI

Pornim dela identitatea:

$$\sin(2n+1)t-\sin(2n-1)t=2\sin t\cos 2nt,$$

în care dacă luăm succesiv $n=0,\ 1,\ 2,\ldots n$, avem:

$$\sin t=\sin t$$

$$\sin 3t-\sin t=2\sin t\cos 2t$$

$$\sin 5t-\sin 3t=2\sin t\cos 4t$$

$$\cdot\quad\cdot\quad,\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\sin(2n+1)t-\sin(2n-1)t=2\sin t\cos 2nt.$$

Inmulțind respectiv aceste egalități cu $n+1,\ n,\ldots 3,\ 2,\ 1$, și adunându-le obținem:

$$(1)\quad \sin t+\sin 3t+\sin 5t+\ldots+\sin(2n+1)t=$$

$$2\sin t\left[\frac{n+1}{2}+n\cos 2t+(n-1)\cos 4t+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2\cos 2(n-1)t+\cos 2nt\right].$$

Dar e cunoscnt, că:

$$\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n+1)t=\frac{\sin^2(n+1)t}{\sin t}$$

având suma sinusurilor unor arce în progresie geometrică (F. G. M., Compléments de Trigonométrie, p. 45), astfel că relația (1) devine:

$$\frac{\sin^2(n+1)t}{\sin t}=2\sin t\left[\frac{n+1}{2}n\cos 2t+\right.$$

$$\left.(n-1)\cos 4t+\ldots+2\cos 2(n-1)t+\cos 2nt\right]$$

$$\therefore\quad \frac{n+1}{2}n\cos 2t+(n-1)\cos 4t+\ldots$$

$$\ldots+2\cos^2(n-1)t+\cos^2 nt=\frac{\sin^2(n+1)t}{2\sin^2 t}$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Manolescu I. Niculae* (Focșani), *Neumann Maria* (Lugoj), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Tunaru R. Traian, Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vasiliu Ch. Gheorghe* (lic. Timișoara).

Observare. D-l *Tedorescu N.* (lic. Spiru-Haret), a stabilit, încă, în mod analog, relația:

$$n\sin 2t+(n-1)\sin 4t+\ldots+2\sin 2(n-1)t+$$

$$\sin 2nt=\frac{n+1}{2}\operatorname{cotg} t-\frac{\sin 2(n+1)t}{4\sin^2 t}$$

PROBLEME PROPUSE

547. — Să se găsească numerile întregi pozitive N și n știind că N^n este egal cu numărul ce se obține scriind unul după altul numerile $N-n$ și $N-2n$.

COL. GH. ȚUICLIU

548. — Să se arate că ortocentrul unui triunghiu se bucură de următoarele proprietăți:

1) Paralele duse prin el la bisectoare întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte ce sunt picioarele a trei ceviene concurente.

2) Perpendicularele duse prin el la bisectoare întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte coliniare.

3) Antiparalelele la laturile triunghiului duse prin el întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte coliniare.

N. G. BOTEA

549. — Fie O și O′ două cercuri tangente exterioare în punctul A și M A N o secantă variabilă.

1°. Se cere locul geometric al conjugatului armonic al punctului M, în raport cu punctele A și N, când punctul M se mișcă pe cercul O.

2°. Să se demonstreze că simetricul punctului M în raport cu O O′, punctul conjugat armonic al punctului M în raport cu A și N, și proecția lui N pe O O′ sunt colineare.

S. M. FELDSTEIN.

548. — Să se stabilească identitatea:

$$16ab=(ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)})^2-$$

$$(a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b})^2$$

S. SAVU.

549. — Să se stabilească identitea:

$$3\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t-\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t=$$

$$4\frac{\sin^4 2kt}{\sin t}.$$

V. ALACI

550. — Care este traectoria și legea mișcării unui punct mobil, știind că viteza, accelerația și raza vectorie formează un sistem nul.

ION C. SCHILERU-DILY.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

A apărut „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

A apărut, *Curs de rezistența materialelor*, de d-l *Constantin C. Teodorescu*, Inginer-Șef, profesor la Școala Politechnică din *Timișoara*. Acest curs cuprinde lecțiunile făcute de autor, cu studenții anului II și III ai Școalei Politechnice din *Timișoara*.

Tipărit într'o formă foarte îngrijită și clară, cu numeroase figuri ireproșabil construite, cartea este menită a fi de un real folos studenților noștri technici și tuturor acelor ce vor să aibă un tratat clar, concis și complect de *rezistența materialelor*.

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 AUGUST 1926 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICI. GENERALIZAREA UNEI PROPRIETATI A SERIEI LUI „E"
2. NOTE MATEMATICE, 10, 11.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 453, 457, 459, 465, 469, 476, 496, 513
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

GENERALIZAREA UNEI PROPRIETAȚI A SERIEI LUI „e“

de TIBERIU POPOVICIU

Se știe că:

$$(\varphi) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \mathrm{E}_k\, e$$

E_k fiind un număr întreg și pozitiv. Acest rezultat vreau să-l generalizez pentru o anumită serie care generalizează seria numărului e.

Fie f_x fiind un polinom oarecare în x cu coeficienții întregi. Funcțiunea:

$$\mathrm{F}_f(x) = \frac{x^{f_0}}{f_0!} + \frac{x^{f_1}}{f_1!} + \frac{x^{f_2}}{f_2!} + \ldots + \frac{x^{f_n}}{f_n!} + \ldots$$

generalizează funcțiunea exponențială e^x. Numărul $\mathrm{F}_f(1)$ va generaliza numărul e.

Să punem-:

$$(3) \qquad s_k = \frac{f_0^k}{f_0!} + \frac{f_1^k}{f_1!} + \ldots + \frac{f_n^k}{f_n!} + \ldots$$

vom demonstra că s_k *este o expresie lineară de* $\mathrm{F}_{f-1}(1)$, $\mathrm{F}_{f-2}(1), \ldots \mathrm{F}_{f-k}(1)$ *cu coeficienții întregi.*

Funcțiunile $\mathrm{F}_{f-m}(x)$ sunt funcțiuni analoage cu $\mathrm{F}_f(x)$ căci $f_x - m$ este un polinom în x cu coeficieții întregi (m întreg).

Observ înainte de toate că:

$$(4) \qquad \mathrm{F}_f^{(k)}(x) = \mathrm{F}_{f-k}(x).$$

Să considerăm acum funcțiunea:

$$\varphi(x) = \frac{s_0}{0!} + \frac{s_1}{1!}x + \ldots + \frac{s_k}{k!}x_k + \ldots$$

zisă *functiunea generatoare* a lui s_k.

Avem:

$$\varphi(x) = \frac{1}{0!}\left(\frac{f_0^0}{f_0!} + \frac{f_1^0}{f_1!} + \frac{f_2^0}{f_2!} + \ldots + \frac{f_n^0}{f_n!} + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{1}{1!}\left(\frac{f_0^1}{f_0!} + \frac{f_1^1}{f_1!} + \ldots + \frac{f_n^1}{f_n!} + \ldots\right)x +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(\frac{f_0^k}{f_0!} + \frac{f_1^k}{f_1!} + \ldots + \frac{f_n^k}{f_n!} + \ldots\right)x^k +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

care se poate însuma după coloane căci seriile:

$$\frac{1}{f_n!}\left(\frac{f_n^0}{1!} + \frac{f_n^1 x}{1!} + \ldots + \frac{f_n^k x^k}{k!} + \ldots\right) = \frac{e^{f_n x}}{f_n!}$$

sunt absolut convergente; prin urmare:

$$\varphi(x) = \frac{e^{f_0 x}}{f_0!} + \frac{e^{f_1 x}}{f_1!} + \ldots + \frac{e^{f_n x}}{f_n!} + \ldots = \mathrm{F}_f(e^x).$$

Dar, după formula lui *Mac-Laurin:*

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

așa că:

$$s_k = \varphi^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k \mathrm{F}_f(e^x)}{dx^k}\right]_{x=0}.$$

Avem acuma:

$$(5) \qquad \varphi'(x) = e^x \frac{d\mathrm{F}_f(e^x)}{de^x}$$

sau în virtutea formulei (4):

$$\varphi'(x) = e^x \mathrm{F}_{f-1}(e^x).$$

Tot așa obținem:

$$\varphi''(x) = e^x F_{f-1}(e^x) + (e^x)^2 F_{f-2}(e^x)$$

$$\varphi'''(x) = e^x F_{f-1}(e^x) + 3(e^x)^2 F_{f-2}(e^x) + (e^x)^3 F_{f-3}(e^x)$$

Să presupunem că formula este adevărată până la $k-1$, adîcă avem:

$$\varphi^{(k-1)}(x) = e^x F_{f-1}(e^x) + a^1_{k-1}(e^x) + \ldots + a^{k-2}_{k-1}(e^x)^{k-1} F_{f-k+1}(a^x),$$

coeficienții a^i_{k-1} fiind întregi Derivând obținem:

$$\varphi^{(k)}(x) = e^x F_{f-1}(e^x) + (1 + 2a^1_{k-1})(e^x)^2 F_{f-2}(e^x) + (a^1_{k-1} + 3a^2_{k-1})(e^x)^3 F_{f-3}(e^x) + \ldots + a^{k-2}_{k-1}(e^x)^k F_{f-k}(e^x)$$

care e tot o expresie lineară, cu coeficienții întregi în raport cu cantitățile F_{f-1}, $F_{f-2}, \ldots F_{f-k}$. Cum formula a fost verificată pentru $k = 1, 2, 3$ rezultă în virtutea inducțiunei complete, că ea este generală. Dacă facem $x = 0$, obținem:

$$S_k = F_{f-1}(1) + a_k F_{f-2}(1) + a^2_k F_{f-3}(1) + \ldots + a^{k-2}_k F_{f-k+1}(1) + F_{f-k}(1)$$

ceiace demonstrează teorema noastră. Putem face încă importanta observație că S_k se exprimă printr'o relație *omogenă* întrc F_{f-1}, $F_{f-2}, \ldots$

Rămâne să se calculeze efectiv coeficienții a^i_k.

Avem:

$$a^1_k = 1 + 2a^1_{k-1} \quad \text{și} \quad a^1_2 = 1$$

deci: $a^1_k = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-2} = 2^{k-1} - 1$

tot așa din:

$$a^2_k = a^1_{k-1} - 3a^2_{k-1} = a^1_{k-1} + 3a^1_{k-2} + 3^2 a^1_{k-2} + \ldots + 3^{k-4} a^1_3 + 3^{k-3} a^2_3$$

găsim:

$$a^2_k \frac{1}{3!}\left(3^k - \frac{3}{1} \cdot 2^k + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}\right).$$

Zic că în general avem formula:

$$6^a_{\cdot} \quad a^{i-1}_k = \frac{1}{i!}\left[i^k - C^1_i (i-1)^k + C^2_i (i-2)^k + \ldots + (-1)^{i-1} C^{i-1}_i 1^k\right]$$

Intr'adevăr căutând diferența $a^i_k - a^{i-1}_{k-1}$ avem:

$$a^i_k - a^{i-1}_{k-1} = \frac{(i+1)^k}{(i+1)!} - \left(\frac{C^1_{i+1} i^k}{(i+1)!} + \frac{i^{k-1}}{i!}\right) + \left(\frac{C^2_{i+1}(i-1)^k}{(i+1)!} + \frac{C^1_i (i-1)^{k-1}}{i!}\right) + \ldots$$

$$\ldots = (i+1)\frac{1}{(i+1)!}\left[(i+1)^{k-1} - C^1_{i+1} i^k + C^2_{i+1}(i-1)^{k-1} + \ldots\right] = (i+1) a^i_{k-1}$$

Insă:

$$a^i_k - a^{i-1}_{k-1} = (i+1) a^i_{k-1}$$

este tocmai relația de recurență a numerilor a^i_k, deci valoarea lui a^{i-1}_k este într'adevăr (6).

Valoarea lui a^i_k se poate salcula din relația (5), derivând-o succesiv. Expresia acestei derivate a fost găsită prima dată de *Herschel*.

In cazul particular al numărului e vom avea:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = e \sum_{i=0}^{k}\left[\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j C^j_i (i-j)^k\right].$$

Teorema enunțată în acest articol se mai poate demonstra și în felul următor:

Avem:

$$F_{f-k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(f^n - k)!} = \sum \frac{(f_n - 1)(f_n - 2)\ldots(f_n - \overline{k-1}) f_n}{f_n!}$$

și dacă notăm cu N^i_j suma produselor câte i a primelor j numere, vom avea:

$$F_{f-k}(1) = \sum_0^{\infty} \frac{f_n^k}{f_n!} - N^1_{k-1} \sum_0^{\infty} \frac{f_n^{k-1}}{f_n!} + \ldots + (-1)^{k-1} N^{k-1}_{k-1} \sum_0^{\infty} \frac{f_n}{f_n!}$$

care este relația de recurență între numerile S_k, $S_{k-1}, \ldots$ Făcând $k = 1, 2 \ldots k$ obținem sistemul:

$$S_k - N^1_{k-1} S_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} N^{k-1}_{k-1} S_1 = F_{f-k}(1)$$

$$S_{k-1} - N^1_{k-2} S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2} N^{k-2}_{k-2} S_1 = F_{f-k+1}(1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1 = F_{f-1}(1)$$

a cărui determinant fiind 1 avem imediat:

$$S_k = \begin{vmatrix} F_{f-k}(1) & -N^1_{k-1} & \dots & (-1)^{k-1} N^{k-1}_{k-1} \\ F_{f-k+1}(1) & 1 & -N^1_{k-e} & (-1)^{k-2} N^{k-2}_{k-2} \\ & 0 & 1 \dots & (-1)^{k-3} N^{k-3}_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{f-1}(1) & 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix}$$

care probează teorema.

In cazul numărului e:

$$S_k = c \begin{vmatrix} 1 & -N^1_{k-1} & N^2_{k-1} \dots (-1)^{k-1} N^{k-1}_{k-1} \\ 1 & 1 & -N^1_{k-2} \dots (-1)^{k-2} N^{k-2}_{k-2} \\ 1 & 0 & 1 \dots (-1)^{k-3} N^{k-3}_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 \dots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

NOTE MATEMATICE

10. — *Asupra problemei 461.*

Considerăm progresiuuea geometrică:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

pe care să o ridicăm la patrat, avem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n+1} + (n+1) x^n + n x^{n+1} + (n-1) x^{n+1} + \dots + 2 x^{2n+1} + x^{2n} = \frac{(x^{n+1} - 1)^2}{(x-1)^2}$$

Inlocuind aci x prin x^2, apoi divizând prin x^{2n} şi scriind alături termenii echidistanţi, avem:

$$(1) \quad (x^{2n} + x^{-2n}) + 2[x^{2(n-1)} + x^{-2(n-1)}] + 3[x^{2(n-2)} + x^{-2(n-2)}] + \dots + n(x^2 + x^{-2}) + (n+1) = \frac{[x^{n+1} - x^{-(n+1)}]^2}{(x + x^{-1})^2}$$

Substituind:

$$x = e^{it}, \quad i = \sqrt{-1},$$

atunci:

$$x^\alpha - x^{-\alpha} = e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t} = 2i \sin \alpha t$$

(Formulele lui *Euler*),

$$x^\alpha + x^{-\alpha} = e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t} = 2 \cos \alpha t$$

şi relaţia (1) devine:

$$n + 1 + 2n \cos 2t + 2(n-1) \cos 4t + \dots + 4 \cos 2(n-1) t + 2 \cos 2nt = \frac{\sin^2 (n+1) t}{\sin^2 t}$$

sau:

$$\frac{n+1}{2} + n \cos 2t + (n-1) \cos 4t + \dots + 2 \cos 2(n-1) t + \cos 2nt = \frac{\sin^2 (n+1) t}{2 \sin^2 t}$$

care este tocmai identitatea cerută în problema 461.

V. ALACI

11. — *Generalizarea unor identităţi.*

In „Traité d'Algèbre" par *Niwenglowski* p. 564. tom II se găsesc următoarele identităţi:

$$(1) \quad x^p - C^1_n (x-1)^p + C^2_n (x-2)^p - \dots + (-1)^n C^n_n (x-n)^p = 0$$

unde: $p < n$.

$$(2) \quad x^n - C^1_n (x-1)^n + C^2_n (x-2)^n - \dots + (-1)^n C^n_n (x-n)^p \equiv n!$$

Identităţile de mai sus se obţin de obiceiu cu ajutorul diferenţelor finite. Voiu încercà să obţiu identităţile (1), (2) cu ajutorul derivatelor, dându-le în acelaş timp o generalizare.

Intr'adevăr considerăm funcţiunea:

$$y = e^{xt} - C^1_n e^{(x-r)t} + C^2_n e^{(x-2r)t} - \dots + (-1)^p C^p_n e^{(x-pr)t} + \dots + (-1)^n C^n_n e^{(x-nr)t}$$ [1]

Care are valoarea: $y = e^{(x-nr)t} [e^{rt} - 1]^n$

Derivând de p ori: (t fiind variabila)

$$y^{(p)} = x^p e^{xt} - C^1_n (x-r)^p e^{(x-r)t} + C^2_n (x-2r)^p e^{(x-2r)t} - \dots + (-1)^n C^n_n (x-nr)^p e^{(x-nr)t}$$

---

1) Unde e este numărul transcedental, cunoscut.

Derivând pe y de n ori și ținând seama de formula lui *Leibnitz* vom avea:

$$y^{(p)} = P(e^{rt}-1) + D^{(p)}(e^{rt}-1)^n \cdot e^{(x-nr)t}$$

1°. Când $p<n$ e natural că vom avea peste tot factor comun pe $(e^{rt}-1)$ și făcând $t=0$ vom avea:

$$|D^{(p)}y|_{t=0} \equiv 0$$

Deci: $x^p - C_n^1(x-r)^p + C_n^2(x-2r)^p - \ldots$

$$\ldots + (-1)^n C_n^n (x-nr)^p \equiv 0 \quad (3)$$

2°. Când $p=n$, atunci va rămâne un termen care nu va conține pe $(e^{rt}-1)$ ca factor și acest termen se poate deduce ușor.

Considerăm:

$$e^{(x-nr)t} D^{(n)}(e^{rt}-1)^n$$

Derivând odată, de două ori etc.:

$$D^{(1)}(e^{rt}-1)^n = n(e^{rt}-1)^{n-1} r e^{rt} =$$

$$nr(e^{rt}-1)^{n-1} e^{rt}$$

$$D^{(2)}(e^{rt}-1)^n = nr(n-1)r(e^{rt}-1)^{n-2} e^{2rt} +$$

$$r e^{rt}(e^{rt}-1) nr$$

. . . . . .

. . . . . .

$$D^{(n)}(e^{rt}-1)^n = nr(n-1)r \ldots r(e^{nrt} + P(e^{rt}-1)$$

p fiind un polinom în (e^t).

Imediat deducem:

$$|D^{(n)} e^{(x-nr)t}(e^{rt}-1)^n|_{t=0} = n!\, r^n \text{ sau} \equiv r2r \ldots nr$$

Deci:

$$x^n - C_n^1(x-r)^n + C_n^2(x-2r)^n - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n C_n^n (x-nr)^n \equiv r \cdot 2r \cdot 3r \ldots nr \quad (4)$$

Pentru $r=1$ ajungem la identitățile (1), (2).

Din identitățile (3) și (4) voiu deduce identitățile cari fac obiectul notelor: 9 R. M. T an V p. 84—85 și 6 an VI p. 37—38.

In (3) înlocuim pe p cu $p-2k$ apoi facem $x=p$, $n=p$, și avem: (p fiind impar)

$$p^{p-2k} - C_p^1(p-2)^{p-2k} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{\frac{p-1}{2}} (1)^{p-2k} + (-1)^{\frac{p+1}{2}} C_p^{\frac{p+1}{2}} (-1)^{p-2k} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p C_p^p (-p)^{p-2k} \equiv 0.$$

Sau grupând convenabil și ținând seamă că $C_m^n = C_m^{m-n}$ avem:

$$2.\left[p^{p-2k} - C_p^1(p-2)^{p-2k} + C_p^2(p-4)^{p-2k} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{\frac{p-1}{2}}\right] \equiv 0$$

Aceasta este adevărat căci:

$$(-1)^q = (-1)^{p-q}(-1)^{p-2k}$$

$$(-1)^q = (-1)^{2(p-k)}(-1)^{-q} \equiv (-1)^q.$$

In cazul când p este par:

$$p^{p-2k} - C_p^1(p-2)^{p-2k} + \ldots + (-1)^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\frac{p}{2}-1} 2^{p-2k} +$$

$$(-1)^{\frac{p}{2}} C_p^{\frac{p}{2}} (0)^{p-2k} + (-1)^{\frac{p}{2}+1} C_p^{\frac{p}{2}+1} (-2)^{p-2k} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p C_p^p (-p)^{p-2k} = 0$$

sau grupând și ținând seama de cele stabilite mai sus:

$$2\left[p^{p-2k} - C_p^1(p-2)^{p-2k} + C_p^2(p-4)^{p-2k} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\frac{p}{2}-1} 2^{p-2k}\right] \equiv 0$$

In același mod deducem:

$$2\left[p^p - C_p^1(p-2)^p + C_p^2(p-2^2)^p - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^n C_p^n (p-2n)^p\right] \equiv 2^p\, p!$$

sau:

$$p^p - C_p^1(p-2)^p + C_p^2(p-4)^p - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n C_p^n (p-2n)^p \equiv 2^{p-1}\, p!$$

unde:

$$n \begin{cases} \dfrac{p-1}{2}, & \text{pentru } p \text{ impar} \\ \dfrac{p}{2}-1, & \text{pentru } p \text{ par.} \end{cases}$$

In acest mod am putut deduce interesantele identități cari fac obiectul notei D-lui *V. Alaci.*

D. NESTOR

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 11, Iulie 1926. Patrate pseudogemene, *Colonel Gh. Buicliu*. Les isocentres du triangle, *N. Agronomof*. Cuburi terminate cu rădăcina lor (urmari), *E. Stefănescu*. Proprietăți ale triunghiului, *Const. C. Popovici*.

2. *N. Abramescu. Introducere elementară în studiul analitic al, Geometriilor Neeuclidiene* (lecțiuni profesate la, Facultatea de Științe din *Cluj*.)

Cuprinde următoarele capitale: Noțiuni introductive. Definițiuni metrice. Noțiuni de geometrie sferică. Noțiuni asupra deplasărilor în geometria euclidiană clasică și iperbolică. Geometria neeuclidiană. Geometria Cayleyană. O recomandăm călduros studenților nostri. Prețul 125 lei.

3. *P. Sergesco*. Quelques remarques sur les courbes unicursales (Compte rendu au Congrès de Liège, 1925) de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.

4. *P. Sergesco*. Sur la résolution en entiers de l'équation, $a x^3 + b = y^2$. (Extrait des Comptes rendus du Congrès des Sociétts savantes 1925, Sciences).

5. *Constantin Mureşanu. Educația mulțimilor prin școala creatoare*. Cuprinde următoarele capitole. Strigătul vremii: educația mulțimilor. Ce-i o multime? Educația intelectuală, afectivă și voluntară a mulțimilor. Educația mulțimilor prin școala. Spre școala creatoare. Creații pedagogice de la liceul din *Constanța*. Creații pedagogice de la liceul din *Vatra-Dornei*. Școala creatoare. Determinarea obiectivelor pedagogice. Educația mulțimilor prin biserică. Biserica creatoare. Preotul adevarat. Educația mulțimilor prin stat. Rolul statului între școală și biserica creatoare.

Recomandăm călduros corespondenților nostri, aceasta carte scrisa cu pricepere și cu dragoste de Țară de un harnic și distins profesor, d-l *C. Mureşanu*, Director al liceului Vatra-Dornei, Prețul 30 lei.

PROBLEME REZOLVATE

453. — *Să se discute ecuația:*

$$x^3 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha = 0,$$

α fiind un parametru oarecare.

N. CIORANESCU

Folosim teorema lui *Rolle* pentru ecuația dată, $f(x) = 0$.

Anulând derivata, avem:

$$f'(x) = 3x^2 + 4\alpha x + \alpha^2 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = -\alpha, \quad x = -\frac{\alpha}{3}$$

Formăm acum sirul lui *Rolle* și rezumăm discuțiunea în tablourile următoarele, după diferitele valori ale lui α:

$\alpha \leq 0$	$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = \alpha\left(1 - \frac{4\alpha^2}{27}\right)$	$f(-\alpha) = \alpha$	$f(+\infty)$	Rădăcini
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 răd. reale
$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$-$	$+$	1 răd. dublă $= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
	$-$	$-$	$-$	$+$	1 răd. reală > 0
0					1 răd. triplă $= 0$

$\alpha \geq 0$	$f(-\infty)$	$f(-\alpha) = \alpha$	$f\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = \alpha\left(1 - \frac{4\alpha^2}{27}\right)$	$f(+\infty)$	Rădăcini
0					1 răd. triplă $= 0$
	$-$	$+$	$+$	$+$	1 răd. reală < 0
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-$	$+$	0	$+$	1 răd. dublă $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$+\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 răd. reale

Vedem dar, că dacă, $\alpha < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sau $\alpha > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ avem 3 rădăcin reale; dacă $-\frac{3\sqrt{3}}{2} > \alpha \neq 0 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$, avem o rădăcină reală; dacă $\alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sau $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ avem o rădăcină dublă $x = \alpha$ și dacă $\alpha = 0$, avem o rădăcină triplă $x = 0$.

Soluții parțiale date de d-nii: *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beju Traian* (lic. Arad), *Blasko Beatrix* (Lugo)), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Dinescu Florin* (lic. Pitești), *Grofşoreanu Gh.* (Șc. Polit., Timișoara), *Kertész P.*, *Ma-*

nolescu I. Nicolae (lic. Focşani), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Morţun Emil* (lic. Lazăr), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr), *Popovici Aurel* (Focşani), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Segârcianu D. C-tin* (lic. Buzeşti, Craiova), şi *Tanovici V. C.* (Şc. Polit., Timişoara).

Altă soluţie: Vom utiliza rezultatele din articolul *„Discuţia ecuaţiilor de gradul 3 şi 4"* de *Nicolae Ciorănescu*, „R. M. T." an. V. p. 3.

Să formăm ca acolo cantitatea Δ_1, care pentru ecuaţia:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

este:

$$\Delta_1 = 3(-a^3 b^2 + 27 c^2 - 18 a b c + 4 a^3 c + 4 b^3).$$

In cazul nostru, avem:

$$a = 2\alpha, \quad b = \alpha^2, \quad c = \alpha$$

şi atunci:

$$\Delta_1 = 3(-4\alpha^6 + 27\alpha^2 - 36\alpha^4 + 32\alpha^4 + 4\alpha^6) =$$

Semnul lui Δ_1, care ne interesează, depinde de acel al factorului $27 - 4\alpha^2$.

Dacă, $\alpha^2 < \frac{27}{4}$, adică $-\frac{3\sqrt{3}}{3} < \alpha < \frac{3\sqrt{3}}{3}$ atunci $\Delta_1 < 0$ şi ecuaţia dată are 2 rădăcini imaginare.

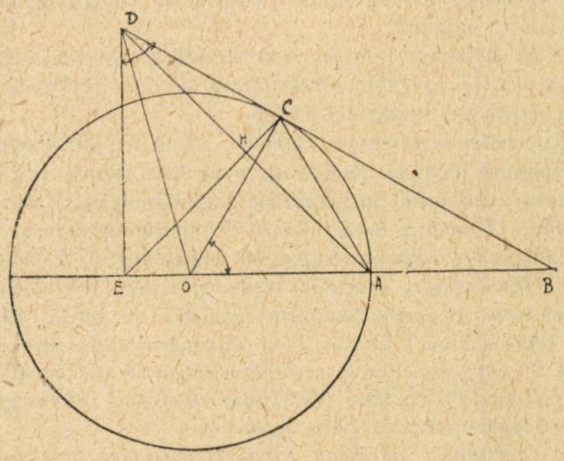
Dacă, $\alpha^2 > \frac{27}{4}$, adică $\alpha < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sau $\alpha > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci $\Delta_1 = 0$ şi ecuaţia dată are toate rădăcinele reale.

Dacă, $\alpha^2 = \frac{27}{4}$, adică $\alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sau $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci $\Delta_2 = 0$ şi ecuaţia dată are o rădăcină dublă, $x = \alpha$.

Soluţii date de d-nii: *Franţiu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Grădin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Popovici Aurel* (Focşani), *Râpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Schächter M. Ozias*, *Scripcă Laur* (Şc. Polit., Bucureşti), şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

457. — *Se dă un cerc* O *de rază* R *şi un punct* A *pe acest cerc. Pe prelungirea diametrului ce trec prin* A, *se ia* $AB = R$. *Din punctul* B *se duce* BC *tangentă la cerc în punctul* C. *Pe prelungirea lui* BC *se ia* $CD = R$ *şi fie* E *proecţia lui* D *pe diametrul ce trece prin* A. *Să se demonstreze că* DA *este perpendiculară în* H *pe* CE *şi că triunghiul* AHE *este dreptunghiu isoscel.*

VASILE TARAS



Construim figura în condiţiile problemei, luând $AB = CD = R$ şi DE perpendiculară pe OA.

In triunghiul dreptunghic BCO, având $OB = 2CO$, rezultă egalităţile:

$$\sphericalangle COB = 60^0, \quad \sphericalangle OBC = \sphericalangle ACB = 30^0,$$

$$AC = R.$$

De aci rezultă: $\sphericalangle DCA = 150^0$ şi cum triunghiul DCA este isoscel ($DC = AC = R$), rezultă:

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle CAD = 15^0.$$

De altă parte, observăm că:

$$\sphericalangle DAB = 15^0 + 120^0 = 135^0, \quad (\sphericalangle CAB = 120^0),$$

şi urmează că:

$$\sphericalangle EAD = 45^0, \tag{1}$$

prin urmare triunghiul dreptunghic DEA, este şi isoscel, deci $ED = EA$. Punctele C şi E fiind astfel egal departete de extremităţile segmentului DA, (întru cât $CD = CA$, $ED = EA$), rezultă că CE este perpendiculară pe DA şi prima parte a problemei este astfel stabilită. Mai departe, observăm că triunghiul AHE, fiind dreptunghic şi având $\sphericalangle HAE = 45^0$ în virtutea egalităţii (1), rezultă că acest triunghiu AHE este dreptunghiu isoscel.

Soluții date de d-nii: *Agapescu N. Nicolae* (Semin. Pedag. Iași), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Atanasiu M. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Bălășescu N. C.* (lic. Tg.-Mureș), *Bădescu Anrelian* (lic. Sava, București), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Brustuc Gheorghe* (lic. milit., Iași), *Carabețeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, București), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ciocoiu Laurențiu* (Brașov), *Cocea Gh. Theodor* (lic. Pitești), *Cosma Z. Gh.* (București), *Costăchescu V. C.* (lic. milit., Iași), *Deoanco Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dimu S. D-tru* (Caporal Brașov), *Dravătz I.* (lic. Ploești), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., București), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Franțiu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Gheorghiu Cl. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghebanowschi E. Nicolae* (Orhei), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Hart Lazăr* (lic. Galați), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Pitești), *Ionescu M. Octav* (Instit. Schewitz-Thierrin, București), *Irhașiu Viorel* (Șc. Polit., Timișoara), *Isăcescu C. C-tin* (Tg.-Jiu), *Iscovici Paul* (Pitești), *Istinie I. C.* *Brezuica* (lic. Caracal), *Lateș I. Vasile* (Semin. Pedag., Iași), *Lazăr Katz* (lic. Botoșani), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (Iași), *Monolescu I. Nicolae* (lic. Focșani), *Marcovici H.* (Botoșani), *Marcu Alexandru* (Șc. Polit., Timișoara), *Mareș Grigore* (lic. Bacău), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Matak D. Radu* (Semin. Pedag., București), *Mihăilescu Șt. Niculae* (lic. Matei-Basaral, București), *Mihai Octavian* (Șc. Polit., Timișoara), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Mützel A.* (lic. Cernăuți), *Neacsu Vasile* (lic. Brașov), *Negreu V. Petruș* (Șc. Polit., Timișoara), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. milit., Craiova), *Nicolescu V. Gh.* (lic. Focșani), *Niculescu Emanoil* (lic. milit., Craiova), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgil* (lic. Tg.Mureș), *Popovici I. Puin Dan* (Chișinău), *Purdilă C.* (lic. Brașov), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Rusanda Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Scripcă Laur* (Iași), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Șerban Aurel* (lic. Brașov), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Stan I. Aurelian* (lic. milit., Iași), *Stan I. C-tin* (lic. Roman), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu Teodor* (lic. Brăila), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasilescu B* (lic. Sf. Sava, București), *Vasilescu C. Alexandru* (lic. Ploești), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași), *Zamfirescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova), și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

459. — *Să se arate că:*

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 2+4\cdot 5\cdot 2^2+5\cdot 6\cdot 2^3+\ldots$$
$$+\ldots(n-1)\,n\cdot 2^{n-3},$$

se divide prin, n^2-3n+4. *Care este câtul?*

EMIL STEFANESCU

Considerăm progresia geometrică:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

pe care o derivăm succesiv de două ori, avem:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$$
$$\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$2+2\cdot 3x+3\cdot 4\cdot x^2+\ldots+(n-1)\,nx^{n-2}=$$
$$\frac{n(n+1)(x^n-x^{n-1})(x-1)-2[nx^{n+1}-(n+1)x+1]}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(n^2-n)x^{n+1}-2(n^2-1)x^n+(n^2+n)x^{n-1}-2}{(x-1)^3}$$

Dacă în această identitate luăm $x=2$, avem:

$$2+2\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4\cdot 2^2+\ldots+(n-1)\,n\,2^{n-2}=$$
$$(n^2-n)\,2^{n+1}-2(n^2-1)\,2^n+(n^2+n)\,2^{n-1}-2$$

$$**\ 4+2\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4\cdot 2^2+\ldots+(n-1)\,n\,2^{n-2}=$$
$$2^{n-1}(4n^2-4n-4n^2+4+n^2+n)$$

Divizând cu 2 avem încă:

$$1\,2+2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 2+\ldots+(n-1)\,n\cdot 2^{n-2}=$$
$$2^{n-2}(n^2-3n+4)$$

Această egalitate dovedește că expresiunea dată se divide prin n^2-3n+4, câtul fiind, 2^{n-2}.

Soluții date de d-nii: *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Grabovschi Eugen* (Orhei), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Manolescu I. Niculae* (Focșani), *Popovici Aurel* (Focșani), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Ulea Titus* (lic. Internat, Iași) și *Winkler A Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

Altă soluție dată de d-nul, *Popovici Th. Ioan.*

Expresia dată E se poate scrie:

$$(1)\quad E = 2^{n-4}\left[(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)\frac{1}{2}+\right.$$
$$\left.\ldots+2.3.\frac{1}{2^{n-4}}+1.2\frac{1}{2^{n-3}}\right]+$$
$$2^{n-4}\left[2n(n-1)+1.2\frac{1}{2^{n-3}}\right]$$

Dacă în relaţia stabilită în R. M. T. an. IV p. 52, anume:

$$\sum_{k=3}^{n}(n-k+1)(n-k+2)\,q^{k-3}=$$
$$\frac{2(q^n-1)}{(q-1)^3}+\frac{n(q-3)}{(q-1)^2}-\frac{n^2}{q-1},$$

luăm $q=\frac{1}{2}$ avem:

$$(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)\frac{1}{2}+..+1.2\frac{1}{2^{n-3}}=$$
$$\frac{2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{5n}{2}}{\frac{1}{4}}-\frac{n^2}{-\frac{1}{2}}=$$
$$2n^2-10n+16-\frac{1}{2^{n-4}}.$$

Folosind această relaţie în (1), avem:

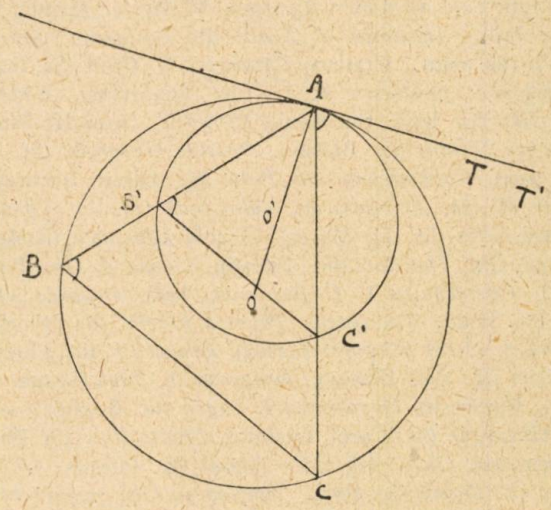
$$E=2^{n-4}(2n^2-10n+16)-1+2^{n-4}2n(n-1)+1=$$
$$2^{n-4}(2n^2-10n+16+2n^2-2n)=$$
$$2^{n-2}(n^2-3n+4),$$

ceea ce dovedeşte că expresia dată E, se divide prin n^2-3n+4, câtul fiind, 2^{n-2}.

465. — *Fie* B′C′ *o paralelă dusă la latura* BC *a unui triunghiu* ABC: *Să se arate că cercurile* ABC *şi* A′B′C′ *sunt tangente.*

V. VALCOVICI

Fie ABC triunghiul dat, B′C′ paralelă la BC, O şi O′ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi AB′C′.



Ducem tangenta TA la cercul O şi observăm că:

$$(1)\qquad \sphericalangle TAC=\sphericalangle ABC,$$

că având aceiaşi măsură, $\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

Ducem apoi T′A tangentă la cercul O′ şi observăm că:

$$(2)\qquad \sphericalangle TAC'=\sphericalangle AB'C',$$

ca având aceiaşi măsură, $\frac{\overset{\frown}{AC'}}{2}$.

Dar:

$$\sphericalangle TAC=\sphericalangle T'AC',$$

şi cum ele au un vârf comun şi două laturi confundate, rezultă că şi T′A se confundă cu TA, că prin urmare cercurile O şi O′, având în A aceiaşi tangentă, sunt tangente.

Soluţii date de d-nii: *Atanasiu M. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Avram Lupu* (lic. Internat, Iaşi), *Bădescu Aurelian* (lic. Sava, Bucureşti), *Bălăsescu C. Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Caracas I. Gh.* (lic. Botoşani), *Cocea Gh. Theodor* (lic. Piteşti), *Constane tinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Deoanca Nicola* (Şc. Polit., Timişoara), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Drăgan G. Gheorghe* (lic Braşov), *Dumitrescu Eug.* (lic. Buzău), *Feldstein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gabrielescu C. Vasile* (Brăila), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu Cl. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşoreanu Gh.* (Şc. Polit., Timişoara), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Istinie I.*

C. Brezuica (Caracal), *Lăzărescu I. Ion* (lic. Sava, Bucureşti), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Mareş Gr.* (Bacău), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Neuman Maria* (Lugoj), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. mil., Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. mil., Craiova), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamţ), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu I. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Th. Ioan* (student, Bucureşti), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Stan Aurelian* (lic. milit., Iaşi), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stoica N. Aurelu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Teraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi), şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

476. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x^2+x+1)^2(x^4-2x\sqrt{6}-2)-x^4\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)+6(x\sqrt{6}+1)=0.$$

TH STOICESCU.

Soluţie dată de d-l: *Gheorghiu Gh. Gheorghe.* (lic. Galaţi).

Folosind relaţia:

$$\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=3.$$

(G. M. vol. XXX, exerciţiu 3, p. 36), ecuaţia dată devine:

$$(x^2+x+1)^2(x^4-2x\sqrt{6}-2)-3x^4+6x\sqrt{x}+6=0$$

$$\therefore\quad (x^4-2x\sqrt{6}-6)\left[(x^2+x+1)^2-3\right]=0.$$

Această ecuaţie se descompune, în:

(1) $(x^2+x+1)^2-3=0$ şi (2) $x^4-2x\sqrt{6}-2=0.$

Ecuaţia (1) ne dă:

$$x^2+x+1\mp\sqrt{3}=0,$$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{\pm 4\sqrt{3}-3}}{2}$, avem deci patru rădăcini.

Ecuaţia (2) se descompune astfel:

$$(x^2+1)^2-(2x^2+2\sqrt{6}+3)=$$

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2=0,$$

sau:

$$(x^2+1+\sqrt{2}x+\sqrt{3})(x^2+1-\sqrt{2}x-\sqrt{3})=0,$$

$$\therefore\quad x^2\pm\sqrt{2}x+1\pm\sqrt{3}=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\frac{\mp\sqrt{2}\pm i\sqrt{2\pm 4\sqrt{3}}}{2},$$

alte patru rădăcini.

Au descompus ecuaţia dată în ecuaţiile (1) şi (2), fără a putea rezolvi ecuaţia (2) d-nii: *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focşani) şi *Popovici Aurel* (lic. Focşani).

496. — *Să se găsească un patrat perfect de de şase cifre, astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să fie complimentul aritmetic al numărului format de primele trei cifre.*

GH. CONSTANTINESCU

Fie n numărul format de primele 3 cifre. Conform enunţului putem scrie:

$$1000n+1000-n=k^2,$$

de unde:

$$n=\frac{k^2-1}{999}-1,$$

sau:

$$(1)\qquad n=\frac{(k+1)(k-1)}{37\cdot 3^3}-1$$

Pentru n găsim imediat o soluţie, luând:

$$k+1=37\cdot 3^3=999,$$

atunci $n=996$. In cazul acesta:

$$k^2=996004=998^2.$$

Din (1) observăm încă, că $k+1$ şi $k-1$ fiind două numere care n'ar putea avea alt divizor $\neq 1$, de cât 2, urmează că nu putem lua, decât:

$$\begin{matrix} k\pm 1=37a \\ k\mp 1=27b \end{matrix}\quad (a \text{ şi } b \text{ întregi})$$

Scăzând avem:

$$37a-27b=\pm 2$$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad b=\frac{37a\mp 2}{27}=a+\frac{2(5a\mp 1)}{27}$$

Va trebui deci să luăm:

$$5a - 1 = \text{mult.}27, \text{ adică } a = 11$$
sau: $$5a + 1 = \text{mult.}27 \quad „ \quad a = 16$$

Rezultă atunci, că:

$$k = 37 \times 11 - 1 = 406,$$
sau: $$k = 37 \times 16 + 1 = 593.$$

Patratele cerute sunt deci:

$$996004 = 998^2$$
$$164836 = 406^2$$
$$351649 = 593^2$$

Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Bălăsescu C.* (lic. Tg.-Mureș), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beșchea G. Nicolae*, *Bey M. Gheorghe* (lic. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Cernes A. M.*, *Cons antinescu G. Gh.* (lic. Craiova), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dărmănescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Feldștein M. Solomon* (lic. Pitești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. Bujor Andrei* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (Pitești), *Munteanu Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Neacsu Vasile*, *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu Șt. Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru*, *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popovici Th. Theodor* (Șc. Superioară de Comerț, București), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Sobel I. Mircea* (lic. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Theodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureș), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucuresti), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

469. — *Să se găsească condiția de compatibilitate a sistemului:*

$$(1) \quad \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + y - 4\alpha\beta = 0 \\ (\alpha^2 + 1)x - (2\alpha\beta + 1)y + p = 0 \end{cases}$$

condiția fiind de forma $f(\alpha, \beta, p) = 0$ se cere:

1) Să se studieze cu ajutorul teoremei lui Rolle natura rădăcinilor ecuațiunii $f(\alpha, 1, p) = 0$ *când* p *varie între* $-\infty$ *și* $+\infty$.

2) Să se calculeze cu două zecimale exacte una din rădăcini pentru $p - 1$.

AUGUST COMAN.

Soluție. Rezolvim sistemul format de primele două ecuațiuni ale sistemului (1); găsim:

$$x = 3\alpha\beta - 1$$
$$y = \alpha\beta + 1.$$

Condițiunea de compatibilitate o vom obține scriind că soluțiunile sistemului precedent verifică ecuațiunea a treia a sistemului (1), obținem astfel:

$$f(\alpha, \beta, p) = (\alpha^2+1)(3\alpha\beta-1) - (2\alpha\beta+1)(\alpha\beta+1+p = 0$$

$$\therefore \quad f(\alpha, \beta, p) = 3\alpha^3\beta - \alpha^2(2\beta^2 + 1) + p - 2 = 0$$

care este conditiunea căutată.

Făcând în relațiunea de condițiune, conform enunțului, $\beta = 1$, obținem relațiunea:

$$f(\alpha.\ 1,\ p) = 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + p - 2 = 0.$$

Rămâne să studiem, cu ajutorul teoremei lui *Rolle*, natura rădăcinilor ecuațiunii precedente, considerând pe α ca variabilă, p fiind un parametru ce varie între $-\infty$ și $+\infty$. Avem:

$$\varphi(\alpha,\ p) = 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + p - 2 = 0.$$

Derivata funcțiunii este:

$$\varphi'(\alpha,\ p) = 9\alpha^2 - 6\alpha = 3\alpha(3\alpha - 2)$$

care se anulează pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = \frac{2}{3}$.

Șirul lui *Rolle* va fi deci:

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$f(+\infty)$
$-$	$p-2$	$p-\frac{22}{9}$	$+$.

Numărul rădăcinilor reale, ale ecuațiunii date, va depinde deci de semnul cantităților $p-2$ și $p-\frac{22}{9}$ expresiuni ce își schimbă semnul când p trece prin valorile 2 și $\frac{22}{9}$, valori cari anulează expresiunile precedente. Ținând seamă de aceste valori principale ale lui p discuția este rezumată în tabloul care urmează:

p	$f(-\infty)$	$f(0)$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$f(+\infty)$	Rădăcini
	—	$p-2$	$p-\frac{22}{9}$	+	
$-\infty$					O rădăcină reală mai mare ca $\frac{2}{3}$.
	—	—	—	+	Două răd. imaginare.
2	—	0	—	+	Trei răd. reale, zero răd. dublă:
:	—	+	—	+	Trei răd. reale, una negat. două pozitive
$\frac{22}{9}$	—	+	0	+	Trei răd. reale $\frac{2}{3}$ răd. dublă. O răd. negat.
	—	+	+	+	O răd. reală negativă, două imaginare
$+\infty$					

Din tabloul precedent se vede că dacă $-\infty < p < 2$ ecuația admite o rădăcină reală pozitivă, celelalte două sunt imaginare.

Pentru $p = 2$, ecuația admite pe zero ca rădăcină dublă, cealaltă fiind $\alpha = 1$.

Dacă $2 < p < \frac{22}{9}$ ecuația admite trei rădăcini reale dintre cari una negativă și două pozitive.

Pentru $p = \frac{22}{9}$, $\frac{2}{3}$ este rădăcină dublă cealaltă fiind $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Dacă $p > \frac{22}{9}$ ecuația admite o singură rădăcină reală.

S'a văzut că dacă $p < 2$ ecuația admite numai o rădăcină reală, deci dacă, conform enunțului $p = 1$ urmează, să avem o singură rădăcină reală pozitivă. Rămâne să calculăm acea rădăcină cu două zecimale exacte. Avem ecuația:

$$\varphi(\alpha) = 3\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$$

Observăm că:

$$\varphi(1) = -1 < 0 \text{ și } \varphi(2) = 11 > 0.$$

deci rădăcina este cuprinsă între 1 și 2.

Aplicând metoda de aproximațiune prin părți proporționale, vom calcula cătimea:

$$h = -\frac{(b-a)\varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \text{ unde } a = 1 \quad b = 2$$

avem:

$$h = -\frac{-1}{11+1} = \frac{1}{12} = 0{,}08$$

Inlocuim în $\varphi(\alpha) = 3\alpha^2(\alpha - 1) - 1$ sirul de numere: 1,08, 1,09, 1,1 1,2, 1,3...

Se găsește că:

$$\varphi(1{,}2) = 0{,}864 - 1 = -0{,}136 < 0$$

$$\varphi(1{,}3) = 1{,}521 - 1 = 0{,}521 > 0$$

rădăcina este deci cuprinsă între 1,2 și 1,3.

Aplicăm din nou acestui interval corecținea h și găsim:

$$h = -\frac{(1{,}3 - 1{,}2)\varphi(1{,}2)}{\varphi(1{,}3) - \varphi(1{,}2)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}136}{0{,}521 + 0{,}136} =$$

$$\frac{0{,}0136}{0{,}657} = 0{,}02$$

Avem:

$$\varphi(1{,}22) = -0{,}017656 < 0 \text{ și}$$

$$\varphi(1{,}23) = +0{,}043901 > 0$$

Rădăcina este deci cuprinsă între 1,22 și 1,23 valoarea ei cu două zecimale exacte este deci $\alpha = 1{,}22$.

Soluții date de d-nii: *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Bârș Petru* (liceul Sibiu), *Gheorghiu Gheorghe*, *Manolescu I. Nicolae* (lic. Unirea, Focșani), *Morțun Emil* (lic. Gh. Lazăr, București), *Nicolau Constantin* (R.-Sărat), *Nicolescu I. Emil* (lic. Ploești), *Pantu I. Z.* (lic. Gh. Lazăr, București), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Teodorescu Nicolae* (lic. Spiru Haret, București), *Tanovici V. Constantin* (lic. Ploești).

Soluțiuni parțiale date de d-nii: *Popovici Aurel* (Focșani), *Scripcă Laur* (Iași), *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova).

513. — *Să se arate că numerile de forma* $999\ldots96000\ldots04$, *unde avem același număr de* 9 *și* 0, *sunt patrate perfecte.*

GH. CONSTANTINESCU

Fie n numărul cifrelor egale cu 9 și 0 a numărului dat N, observăm că putem scri succesiv:

$$N = (10^n - 1)10^{n+2} + 6 \cdot 10^{n+1} + 4 =$$

$$10^{2n+2} - 10 \cdot 10^{n+1} + 6 \cdot 10^{n+1} + 4 =$$

$$10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = (10^{n+1} - 2)^2 =$$

$$(\underbrace{99\ldots98}_{n})^2,$$

ceia-ce invederează că numerile date N sunt patrate perfecte.

Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Albeață N. Ermil* (lic. Piatra-Neamț), *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Drâmbă N. C-tin* (lic. Galați), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Florea V. Gheorgh-* (lic. Carol, Craiova), *Florescu N.* (lic. Național, Iași), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Fumu N.* (lic. Național, Iași), *Gaiaanțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Gheorghin Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Goldștein Paul* (lic. Național, Iași). *Grabowschi Eugemir* (Orhei), *Grünberg Mișiliu* (lic. Național, Iași), *Grünberg Vigder* (lic. National, Iași), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu M. Haralambe* (lic. Pitești), *Manolescu I. N.* (Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Meyer Lazăr* (lic. Național, Iași), *Neacsu Vasile* (lic. Brașov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pașcanu F.* (Semin. Pedag., București), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Rădulescu C. Mihail* (liic. R.-Sărat), *Sigall Louis* (lic. Național, Iași), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tanovici V. C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Tari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucuțești), *Winkler A. Alfréd* (Semin. Pedag. Iași) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

PROBLEME PROPUSE*)

563. — Se cer patratele perfecte de forma $a\,b\,c\,d\,a$.

NICOLAE I. MANOLESCU

564. — Să se arate că numerile de $4p$ cifre:

$$\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{p-q-1}\,9\,\underbrace{00\ldots0}_{2q-1}\,1\,\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1$$

$$\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,6\,\underbrace{00\ldots0}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{2q-1}\,1\,\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,6\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1$$

sunt patrate perfecte.

N. G. BOTEA

565. — Bisectoarele triunghiului echilateral ABC se întâlnesc în punctul 0, 1°. Să se demonstreze că centrele cercurilor înscrise triunghiurilor BOC, AOC și AOB sunt vârfurile unui triunghiu echilateral, A′B′C′. 2°. Să se calculeze suprafața triunghiului echilateral A′B′C′, cunoscând o latură a triunghiului dat, ABC.

V. ALACI

566. — Să se verifice identitatea:

$$(x+1)^m + C_m^1 (x+1)^{m-1}(x-1) + C_m^2 (x+1)^{m-2}$$
$$(x+1)^2 + \ldots + C_m^{m-1}(x+1)(x-1)^{m-1} +$$
$$(x-1)^m \equiv 2^m x^m$$

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

567. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^{15} + y^5 = a \\ x^3 y^4 + x^6 y^3 + x^9 y^2 + x^{12} y = b. \end{cases}$$

IANAULESCU OCTAVIAN

568. — Să se calculeze expresiunea:

$$E = \frac{P_1}{P_2},$$

în care:

$$P_1 = \sin p\alpha - 2x \sin 2p\alpha + 3x^2 \sin 3p\alpha - \ldots$$
$$P_2 = \cos p\alpha - 2x \cos 2p\alpha + 3x^2 \cos 3p\alpha - \ldots$$

RAPEANU N. VIRGIL

569. — Să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{1+\alpha^2+(2n-2k-1)\alpha r+(n-k)(n-k-1)r^2}$$

Să se arate ca aplicație că avem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{(n-1)(1-\alpha)}{k^2(\alpha^2-1)-k(\alpha^2+2\alpha)n-1^2+2n-1]}$$

EMIL STEFANESCU

570. — Să se arate că în orice triunghiu există relația:

$$\sum \left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right) = 3\frac{p}{r}(a-b)(b-c)(c-a),$$

notațiile fiind cele obicinuite.

ANTOANETA COSTINESCU

*) Problemele propuse în numărul trecut al „R. M. T.", fiind greșit numerotate, se vor numerota de corespondenții noștrii succesiv cu numerile de la 557 până la 562.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

A apărut *„Culegere de probleme de Algebră“* de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

A apărut, *Curs de rezistența materialelor*, de d-l *Constantin C. Teodorescu*, Inginer-Șef, profesor la Școala Politechnică din *Timișoara*. Acest curs cuprinde lecțiunile făcute de autor, cu studenții anului II și III ai Școalei Politechnice din *Timișoara*.

Tipărit într'o formă foarte îngrijită și clară, cu numeroase figuri ireproșabil construite, cartea este menită a fi de un real folos studenților noștri technici și tuturor acelor ce vor să aibă un tratat clar, concis și complect de *rezistența materialelor*.

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 SEPTEMBRIE 1926 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D. NEȘTOR ASUPRA UNEI GENERALIZARI A TEOREMEI LUI AUBERT
2. CONCURS
3. NOTE MATEMATICE, 12, 13, 14.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 233, 245, 254, 256, 511, 517, 522, 532
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice Timișoara și d-nii:

Cica Constantin, profesor la liceul din Pitești.
Mioc Vasile, profesor la liceul Diaconovici Loga, Timișoara.
Naneș Gheorghe, profesor la liceul Sf. Sava, București.
Oncica Ioan, profesor la liceul din Pitești.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat
Anul II, broșat, 80 lei
Anul III, broșat, 80 lei
Anul IV, broșat, 80 lei
Anul V, broșat, 80 lei.

ANUL VI. — No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

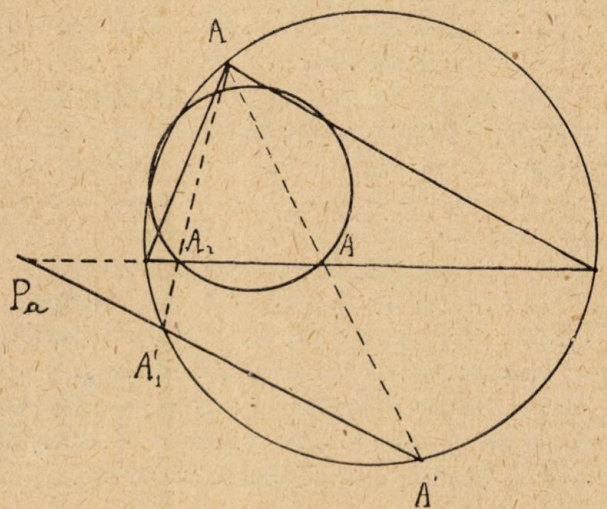
REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNEI GENERALIZARI A TEOREMEI LUI AUBERT

de D. NESTOR

In R. M. T., anul VI, No. 3. d-l *N. Botea*, enunță și demonstrează pe cale baricentrică, următoarea teoremă pe care o deduce ca generalizare a unei teoreme a lui *Aubert*.

Fie A′, B′, C′ și A″, B″, C″ *punctele unde cevienele a două puncte* M *și* N *tae o conică* (Γ) *circumscrisă triunghiului* ABC. A′A″, B′B″, C′C″ *tae respectiv* BC, CA, AB *în* A, B, C, *cari sunt în linie dreaptă.* Intr'o notă din C. M., anul II, 5, am arătat că colinearitatea punctelor A_1, B_1, C_1 subsistă și în cazul când în loc de cevienele punctelor M și N considerăm conjugatele lor armonice. Generalizarea care o voi da mi-a fost sugerată de teorema d-lui *Botea*. Faptul că A_1, B_1, C_1 sunt pe una și aceiași dreaptă atât în cazul cevienelor cât și în cazul conjugatelor lor armonice mi-a permis să enunț teoreme destul de remarcabile pe cari le voi expune mai jos. Iată teorema noastră generalizată:



1. *Fie* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *punctele unde o conică oarecare* (Γ_1) *tae laturile triunghiului* ABC, *înscris într'o conică* (Γ). *Dacă* A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2' *sunt punctele unde transversalele unghiulare* AA_1, AA_2, BB_1 BB_2, CC_1, CC_2 *intersectează* (Γ), *iar* $P_a \equiv (BC, A_1'A_2')$, $P_b \equiv (CA, B_1'B_2')$, $P_c \equiv (AB, C_1'C_2')$ *atunci* P_a, P_b, P_c *sunt pe aceiaș dreaptă* Δ.

Vom alege un sistem de coordonate trilineare în care conica (Γ) să aibă ecuația:

$$(\Gamma) \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0.$$

Ecuația lui (Γ_1) va fi:

$$(\Gamma_1) \quad p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 + l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 vor avea coordonatele:

$$A_1, A_2 \left[0, -l \pm \sqrt{l^2 - 4qr}, 2q\right]$$

$$B_1, B_2 \left[2r, 0, -m \pm \sqrt{m^2 - 4p^2}\right]$$

$$C_1, C_2 \left[-n \pm \sqrt{n^2 - 4pq}, 2p, 0\right].$$

Coordonatele lui A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, au drept formă generală:

$$A_1 \equiv (0, x+y, z), \quad A_2 \equiv (0, x-y, z).$$

Punctele A_1' și A_2' vor fi:

$$A_1' \left[-(x+y)z, (x+y)(x+y+z), z(x+y+z)\right]$$

$$A_2' \left[-(x-y)z, (x-y)(x-y+z), z(x-y+z)\right]$$

$A_1'A_2'$ va avea ecuația:

$$\alpha(x+y+z)(x-y+z) + \beta z^2 + \gamma(x^2 - y^2) = 0.$$

Iar $P_a \equiv (0, y^2 - x^2, z^2)$ și înlocuind pe x, y și z prin valorile lor vom găsi:

$$P_a \equiv [0, -r, q], \quad P_b \equiv [r, 0, -p], \quad P_c \equiv [-q, p, 0].$$

De unde Δ va fi $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$.

2°. Reciproca acestei teoreme este evidentă.

Fie P_a, P_b, P_c *trei puncte unde dreapta* Δ *tae laturile triunghiului* ABC *înscris într'o conică* (Γ), A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2' *punctele unde trei drepte arbitrare trecând prin* P_a, P_b, P_c *tae* (Γ). AA_1', AA_2' *tae* BC *în* A_1, A_2. *Analog obținem punctele* B_1, C_1, B_2, C_2 *cari sunt pe aceiaș conică cu* A_1 *și* A_2.

3°. *Fie* (Γ) *o conică circumscrisă triunghiului* ABC. A_1', A_2' și A_1'', A_2'' *punctele unde două transversale și conjugatele lor armonice tae* (Γ).

a. $A_1'A_2'$ *și* $A_1''A_2''$ *se tae pe* BC *în* P_a.

b. $A_1'A_2''$ și $A_1''A_2'$ *se tae pe* BC *în* P_a'.

c. P_a și P_a' *sunt conjugate armonic în raport cu* B *și* C.

Dacă AA_1' și AA_2' au ecuațiile

$$\beta\gamma_1-\gamma\beta_1=0 \quad (AA_1') \qquad \beta\gamma_1+\gamma\beta_1=0 \quad (AA_1'')$$
$$\text{și}$$
$$\beta\gamma_2-\gamma\beta_2=0 \quad (AA_2') \qquad \beta\gamma_2+\gamma\beta_2=0 \quad (AA_2'').$$

Și, $(\Gamma)\equiv\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0.$

Procedând într'un mod elementar găsim că P_a și P_a' au coordonatele:

$$P_a\equiv(0,\ -\beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2)$$
$$P_a'\equiv(0,\ \beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2)$$

cari natural sunt conjugate armonic în raport cu B și C.

4. *Fie* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *punctele unde* (Γ_1) *tae laturile triunghiului* ABC. A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2' punctele unde transversalele AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 și conjugatele lor armonice tae conica (Γ) circumscrisă triunghiului ABC. Fie:

$$P_a\equiv(BC,\ A_1'A_2',\ A_1''A_2'') \quad P_a'\equiv(BC,\ A_1'A_2'',\ A_1''A_2')$$
$$P_b\equiv(CA,\ B_1'B_2',\ B_1''B_2'') \quad P_b'\equiv(CA,\ B_1'B_2'',\ B_1''B_2')$$
$$P_c\equiv(AB,\ C_1'C_2',\ C_1''C_2'') \quad P_c'\equiv(AB,\ C_1'C_2'',\ C_1''C_2')$$

a. P_a, P_b, P_c *sunt colineare pe* Δ.

b. AP_a', BP_b', CP_c' *sunt concurente în polul trilinear a lui* Δ.

Un caz particular al primei teoreme este:

5°. *a. Tangentele în punctele unde o pereche de ceviene tae o conică circumscrisă determină un triunghiu omologic cu triunghiul dat.*

b. Tangentele în punctele unde conjugatele armonice a trei ceviene concurente tae o conică (Γ) *circumscrisă unui triunghiu* ABC *tae laturile acestui triunghiu în trei puncte colineare.*

6. *Fie* T_a, T_b, T_c *vârfurile triunghiului tangențial corespunzător conicei* (Γ). A_1' *și* A_2'' *punctele unde o ceviană și conjugata ei armonică tae* (Γ). *Analog obținem* B_1', B_1'', C_1' *și* C_1''.

a. T_a, A_1', A_1'' *sunt colineare pe* Δ_a.

Dacă AA_1', BB_1', CC_1' *sunt trei ceviene, iar* Δ_b *și* Δ_c *sunt drepte omoloage cu* Δ_a *avem:*

b. Δ_a, Δ_b *și* Δ_c *sunt concurente în polul dreptei* Δ *în raport cu* (Γ). Δ *desemnând aceiaș dreaptă ca în cazurile precedente.* Deci: Când o ceviană se învârtește în jurul lui A dreapta $A_1'A_1''$ înfășoară T_a.

Când conica (Γ_1) trece prin picioarele a trei ceviene va trece și prin picioarele a altor trei. Deci suntem în cazul d-lui *Botea.*

Iar când conica se desface în două drepte avem cazul nostru din C. M. II, 5.

In cele ce urmează voi enunța câteva teoreme în legătură cu un triunghiu tăiat de o conică.

7°. *Fie* A_1, A_2 și A_1', A_2' *picioarele a două ceviene și a conjugatelor lor armonice. Cercurile* AA_1A_1' și AA_2A_2' *au drept ax radical mediana din* A. *Toate cercurile trec printr'un al doilea punct fix de coordonate baricentrice.* $[a^2,\ b^2+c^2-a^2,\ b^2+c^2-a^2]$.

Când AA_1 și AA_2 se confundă respectiv cu AB și AC cercurile considerate devin adjuncte. Deci regăsim o proprietate cunoscută.

8°. Cercurile AA_1A_2 și $AA_1'A_2'$ se tae pe cercul ABC. Deci putem enunța:

Fie A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *punctele unde o conică tae laturile triunghiului* ABC *înscris în cercul* (C_0). A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2' *conjugatele lor.*

Grupurile de cercuri $[C_0,\ AA_1A_2,\ AA_1'A_2']$, $[C_0,\ BB_1B_2,\ BB_1'B_2']$, $[C_0,\ CC_1C_2,\ CC_1'C_2']$ *au drept axe radicale trei ceviene concurente în* P.

9°. Construcția potențialului este evidentă și rezultă chiar din teorema d-lui *Botea.* Când facem în această teoremă ca cele două puncte să se confunde căpătăm potențialul al doilea al acelui punct in raport cu coordonatele trilineare a sistemului. Analog putem construi potențialul de ord. 2, 3...

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

CONCURS

Revista Matematică din Timişoara urmând calea începută acum 2 ani publică concurs între corespondenţii săi elevi de liceu pentru a se acorda un număr de premii celor mai harnici.

Şi anul acesta, pentru a ţine seamă de studiile făcute şi a pune faţă în faţă concurenţi pe cât se poate egali, premiile se vor da pe clase şi anume:

Pentru cl. V 1 premiu de 500 lei.
Pentru cl. VI 1 premiu de 500 lei.
Pentru cl. VII 1 premiu de 1000 lei.
Pentru cl. VIII 1 premiu de 1000 lei.

Cine doreşte să ia parte la concurs va trebui să se înscrie la d-l Prof. *V. Alaci*, Piaţa Doja No. 12, Timişoara. In scrisoare se va indica numele, clasa şi liceul la care urmează:

Pentru a putea fi înscris candidatul trebue să fie abonat pe anul în curs.

Candidatul va trebui să rezolve cât mai multe din problemele de concurs publicate în numerile 7, 8, 9, 10 şi care vor fi însemnate cu un asterisc*),

Inscrierile se primesc până la 1 Ianuarie 1926. Clasificaţia se va face după închiderea concursului în modul următor:

Fie-care problemă de concurs, care a fost propusă în aceste patru numere şi a cărei soluţie justă, bine şi îngrijit redactată este primită, dă dreptul la 5 puncte.

Fie-care problemă simplă, propusă în aceste patru numere a cărei soluţie justă, bine şi îngrijit redactată este primită dă dreptul la 2 puncte.

Fie-care problemă rezolvată de concurent şi publicată în numerile 1, 2, 3, 4, 5 ale revistei dă dreptul la 1 punct.

Premiile se vor acorda pe clase, acelor ce întrunesc cel mai mare număr de puncte. Următorii 2 vor fi menţionaţi. Comisiunea va putea refusa acordarea premiului dacă nivelul general al candidaţilor din o clasă s'ar arăta nesatisfăcător. In caz când doi candidaţi ar avea acelaş număr de puncte. se va examina activitatea din trecut şi redactarea problemelor pentru a se acorda preferinţa.

Comisiunea pentru alegerea problemelor, triarea soluţiilor, şi acordarea premiilor se compune din D-nii Rector *V. Vâlcovici*, Prof. *V. Alaci*, Lt-Col. *Gh. Buiciu*, Prof. *A. Coman* şi Ing. *C. Teodorescu*.

NOTE MATEMATICE

12. *Suma unei progresii aritmetice.* Având nevoe la o problemă de suma unei progresii aritmetice şi fiindcă uitasem formula am stabilit-o cu ajutorul unei diagrame astfel:

Pun progresia sub forma:

$$S = a(r + 2r + 3r + \ldots + nr)$$

şi avem de sumat paranteza care se poate scrie:

r
$r\ r$
$r\ r\ r$
. . . . . .
$r\ r\ r\ r \ldots r.$

Suma aceasta reprezintă jumătate din patratul desenat. Cum această jumătate ar tăia diagonala în două trebue să adăogăm jumătate din această diagonală. Or patratul are $n^2 r$ termeni, iar diagonala conţine nr termeni. Avem deci:

$$S = a\left(\frac{n^2 r}{2} + \frac{nr}{2}\right)$$

formulă care devine:

$$S = \frac{n}{2}(ar + anr)$$

şi vedem că avem în paranteză primul şi ultimul termen.

C. Teodorescu

13. *Asupra notei 19, din R. M. T., Vol. IV.* Iată o metodă care permite stabilirea, pe cale pur trigonometrică a însumării ce face obiectul citatei note.

Fie S acea însumare şi:

$$(1)\quad S_1 = \cos 2t + 3\cos 4t + 5\cos 6t + \ldots + (2n-1)\cos 2nt$$

dar cum:

$$2\cos 2t + 2\cos 4t + \ldots + 2\cos 2(n-1)t = \frac{2\sin(n-1)t\cos nt}{\sin t}$$

$$S_1 - (2n-1)\cos 2nt + \frac{2\sin(n-1)t\cos nt}{\sin t} =$$

$$3\cos 2t + 5\cos 4t + \ldots + (2n-1)\cos 2(n-1)t.$$

Dacă scad această sumă din (1), găsesc:

$$(2n-1)\cos 2nt - \frac{2\sin(n-1)t\cos nt}{\sin t} =$$

$$\cos 2t - 2\sin t[3\sin 3t + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)t].$$

Dar, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ și atunci, după oarecare transformări simple, obțin:

$$(2)\quad 2\sin^2 t \cdot S = \sin t - (2n-1)\cos 2nt \sin t + 2\sin(n-1)t\cos nt.$$

Avem însă:

$$2\sin(n-1)t\cos nt = \sin(2n-1)t - \sin t$$

și:

$$(2n-1)\cos 2nt\sin t = \frac{(2n-1)}{2}[\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t],$$

în cât (2) va deveni:

$$4\sin^2 t.S = (2n+1)\sin(2n-1)t - (2n-1)\sin(2n+1)t$$

de unde:

$$S = \sin t + 3\sin 3t + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)t = \frac{(2n+1)\sin(2n-1)t - (2n-1)\sin(2n+1)t}{4\sin^2 t},$$

adică tocmai ceiace ne propusesem să stabilim.

Pornind dela suma:

$$S = \sin 2t + 3\sin 4t + \ldots + (2n-1)\sin 2nt$$

și urmând o cale absolut analoagă precedentei, vom obține însumarea:

$$\cos t + 3\cos 3t + \ldots + (2n-1)\cos(2n-1)t = \frac{(2n+1)\cos(2n-1)t - (2n-1)\cos(2n+1)t - 2\cos t}{4\sin^2 t}$$

Calea aceasta simplă, poate conduce și la alte rezultate remarcabile.

CONSTANTIN TH. IONESCU-BUJOR

14. — *Condițiile pentru ca n ecuații de gradul n să aibă o rădăcină comună.* Considerăm sistemul de n ecuațiuni liniare cu n necunoscute:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + k_1x_n + l_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + k_2x_n + l_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots + k_nx_n + l_n = 0. \end{cases}$$

Pe care rezolvindu-l după regula lui *Crammer* obținem:

$$x_p = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n & k_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{vmatrix}} \qquad p = 1, 2 \ldots n$$

Luând acum în (1):

$$(A)\qquad x_1 = x_n^n,\quad x_2 = x_n^{n-1} \ldots x_{n-1} = x_n^2$$

am:

$$(2)\quad \begin{cases} a_1x_n^n + b_1x_n^{n-1} + c_1x_n^{n-2} + \ldots + k_1x_n + l_1 = 0 \\ a_2x_n^n + b_2x_n^{n-1} + c_2x_n^{n-1} + \ldots + k_2x_n + l_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx_n^n + b_nx_n^{n-1} + c_nx_n^{n-2} + \ldots + k_nx_n + l_n = 0. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în relațiile A pe x_p cu valoarea găsită avem:

$$-\frac{\begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \ldots & k_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n & b_n & c_n \ldots & k_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots & k_n \end{vmatrix}} = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots & l_n \end{vmatrix}^n}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots & k_n \end{vmatrix}^n}$$

sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots & k_n \end{vmatrix}^{n-1} \times \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \ldots & k_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \ldots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n & b_n & c_n \ldots & k_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots & l_n \end{vmatrix}^n.$$

Analog găsim:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots k_n \end{vmatrix}^{n-2} \times \begin{vmatrix} a_1 & l_1 & c_1 \dots k_2 \\ a_2 & l_2 & c_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & l_n & c_n \dots k_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{vmatrix}^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots k_n \end{vmatrix}^{n-3} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & l_1 \dots k_1 \\ a_2 & b_2 & l_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & l_n \dots k_n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{vmatrix}^{n-2}$$

. . . . . .

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n & k_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots k_n \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{vmatrix}^3$$

Acestea sunt condiţiile pentruca ecuaţiile (2) să aibă o rădăcină comună.

Pentru $n=2$, avem condiţia cunoscută pentruca ecuaţiunile:

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$$

să aibă o rădăcină comună; adică:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2$$

sau:

$$(a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 = (a_1 b_2 - b_1 a_2)(c_2 b_1 - b_2 c_1)$$

ION Z. PANTU

Observare. Putem trata mai simplu chestiunea de mai sus.

Fie sistemul:

$$\begin{cases} a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + k_1 x + l_1 = 0 \\ a_2 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + k_2 x + l_2 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots + k_n x + l_n = 0, \end{cases}$$

care vrem să admită o rădăcină comună.

Privim aci pe x^n, $x^{n-1}, \dots x^p, \dots x$ ca necunoscute şi aplicăm regula lui *Cramer*, găsim:

$$(1) \qquad x^p = -\frac{\Delta_p}{\Delta}, \qquad p = 1, 2, \dots n,$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots k_1 \\ a_2 & b_2 \dots k_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n \dots k_n \end{vmatrix},$$

iar Δ_p se obţine din Δ înlocuind elementele coloanei p respectiv prin $l_1, l_2, \dots l_n$. Ţinând seamă acum, că:

$$x^p = (x^1)^p,$$

şi privind relaţiile (1), avem:

$$-\frac{\Delta_p}{\Delta} = (-1)^p \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^p,$$

$$\therefore \quad \Delta_p \cdot \Delta^{p-1} = (-1)^{p-1} \cdot \Delta_1^p,$$

unde $p = 2, 3, \dots n$. Avem deci $n-1$, condiţii identice cu cele de mai sus.

V. A.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 12 August 1926. O problemă de calculul variaţiunilor, *Şerban Gheorghiu*. Asupra ortopolului, *M. I. Focşeneanu*.

2. *Foia Matematică*, anul III No. 7, Iulie 1926. Chestiuni de studiat, *Micu Grünbaum*. Asupra unor puncte, *Virgil Cosniţă*.

3. Foia Matematică, anul III, August 1926. Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii sistematice, *Eugeniu Grabovschi*.

4. *Curierul Matematic*; vol. II, No. 6, August 1926. Chestiuni sugestive de examinat, *M. Grünbaum*. O confi-

guraţie de puncte coliniare şi drepte concurente, *D. Nestor.*

5. *Godofredo Garcia.* La Teoria de la Relatividad. Lima. Impr. Permane de E. Z. Casanova, Inambari 359.

6. *Th. Anghelutza.* Sur une équation au différences finies (Extrait, Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. 1926.)

7. *Th. Anghelutza.* Intégration d'une classe d'équations liniaires aux différences finies. (Extrait, Bulletin de la Société de sciences de *Cluj*, jauvier 1926.)

8. *Th. Anghelutza.* Une remarque sur l'intégrale de *Poisson.* (Extrait, Bulletin Sciences Mathématiques, Paris 1926).

9. *Micu Grünbaum.* Contribuţii la Geometric Triunghiului. (Biblioteca „Foii Matematice", Chişinău 1926. Cuprinde: Traducerea geometrică a soluţiilor trigonometrice şi obţinerea identităţilor trigonometrice pe cale geometrică. Note din transformarea *cosogonala.* Teorema lui *Steiner* generalizată. Chestiuni de examinat.

Este o broşură de 60 pagini, care cuprinzând lucruri interesante şi folositoare, o recomandăm cu plăcere corespondenţilor noştri. Preţul 40 lei.

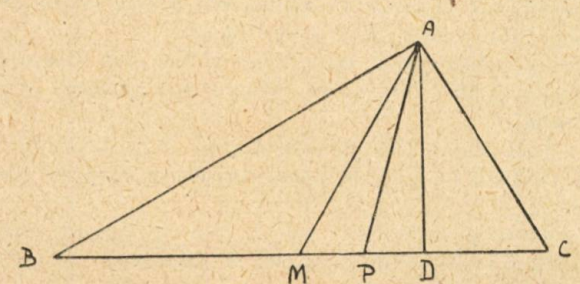
10. *Şerban Gheorghiu.* Essai sur les finances d'après guerre de la Roumanie, en rapport avec les mouvements économiques européen. (Thése présentée à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, en vue de l'obtention du diplôme de Statisticien). Cuprinde: Introduction. Caractères génerau de l'aprés guerre: Généralités. La situation de la Roumanie en 1919. L'appel à l'emprunt. La crise. Quelques aperçus statistiques. Le redressement économique et financiar de la Roumanie.

PROBLEME REZOLVATE

233. — *Se dă triunghiul* A B C *dreptunghic în* A *şi fie* A E *înălţimea şi simediana corespunzătoare vârfului* A. *Să se demonstreze relaţia:*

$$\overline{AD}^2 = EB \cdot EC$$

ION COSEREANU



Fie A D, A P şi A M, înălţimea bisectoarea şi mediana vârfului A. Pentru a învedera relaţia cerută, e suficient să arătăm că simediana A E se confundă cu înălţimea A D.

Pentru aceasta observăm, că:

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle BAM,$$

B M fiind egală cu A M; apoi:

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle DAC,$$

având acelaşi compliment, $\sphericalangle$ B A D, atunci rezultă:

(1) $$\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAM$$

A M fiind bisectoarea unghiului A, avem încă:

(2) $$\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAC$$

Scăzând egalitatea (1) din (2), avem:

$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle PAD,$$

A D este deci simetrica medianei A M faţă de bisectoarea A P, ea este simediana vârfului A, confundându-se cu A E şi atunci evident că:

$$\overline{AD}^2 = EB \cdot EC$$

Soluţii date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Angeleseu N. Traian* (Giurgiu), *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Brăiescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Budişteanu Al.* (lic. M-rea Dealu), *Cantacuzino I.* (lic. M-rea Dealu), *Cazacincu A. Vasile* (lic. Naţional, Iaşi), *Cotea Gh. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Costăchescu N. Ion* (lic. Brăila), *Creţoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Critz D. M.* (lic. Mihai Vieazul, Bucureşt), *David I. Ioan* (Buzău), *Davidsohn Mişu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Dânga S. Vlad* (Şc. Polit., Timişoara), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dimitriu M. Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dumitrescu G. Marin* (Slatina), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Florea C. Al.* (lic. Internat, Iaşi), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic Galati), *Grofşoreauu I. Gh.* (Şc. Polit., Timişoara), *Grigorescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (lic. Galaţi), *Lepadatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Liotta Vincenţiu* (Bârlad), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Moroianu Al* (lic. Constanta) *Musta Şt.* (student, Cluj), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau G. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Orbonaş Iuliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Patroianu I. Mihail* (lic. M rea Dealu), *Percea Viorel* (Bucureşti), *Popea Gh. Ovidiu* (Chişinău), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian*(lic, M-rea Dealu), *Propst Iean* (Şc. Polit., Timişoara), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Rădulet B. Re-*

mus (Şc. Polit., Timişoara), *Silion Gh- Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stânciulescu George* (Piteşti), *Stânculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu A. Nicolae* (Craiova), *Stefulescu I. Ghica* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica N. Aureliu* (Bucureşti), *Şuselescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (Şc. Polit., Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Urzică A.* (lic. Deva), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vlăduţu Sabin* (lic. M-rea Dealu), *Vlaţiu Laurenţiu* (Constanţa) şi *Zamfirescu Alexandru* (lic. Piteşti).

Altă soluţie. Ştim că segmentele determinate de simediană pe latura unui triunghiu, sunt proporţionale cu patratele laturilor alăturate, adică:

$$(1) \qquad \frac{EC}{EB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$$

De altă parte:

$$\overline{AC}^2 = BC \cdot DC, \quad \overline{AB}^2 = BC \cdot DB,$$

de unde:

$$(2) \qquad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{DC}{DB},$$

Din (1) şi (2), rezulta:

$$\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{DB}$$

deci E se confundă cu D şi atunci:

$$\overline{AD}^2 = EB \cdot EC$$

Soluţii date de d-nii: *Bârglăzau A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Bedie N. D-tru* (R.-Sărat), *Berdan C.* (Bucureşti), *Brădeţeanu C. Cornel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Georgescu I. N. Valeriu* (Călăraşi), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Iliescu C. Teodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti).

245. — *Ce se poate afirma de una din ecuaţiile:*

$$a x^2 + 2 b x + c = 0$$
$$(b - a) x^2 + (c - a) x + c - b = 0,$$

dacă ele au o rădăcină comună.

TH. ANGHELUTA

Observăm că ecuaţia 2-a se verifică pentru $x = -1$, deci $x_1 = -1$, este o rădăcină a ei şi cum produsul rădăcinelor ei este $\frac{c-b}{b-a}$, urmează că:

$$x_2 = \frac{b-c}{b-a}$$

este a 2-a rădăcină a ei.

Evident că rădăcina comună a celor două ecuaţii date, n'ar putea fi decât -1 sau $\frac{b-c}{b-a}$.

Cazul I-a. Pentru ca $x_1 = -1$, să fie rădăcină şi a primei ecuaţii, trebuie să avem:

$$(1) \qquad a - 2b + c = 0$$

$$\ast\ast\ast \quad \frac{b-c}{b-a} = -1,$$

şi în acest caz, *putem spune despre ecuaţia* 2-a *că are o rădăcină dublă:*

$$x_1 = x_2 = -1.$$

Prima ecuaţia are rădăcinele -1 şi $-\frac{c}{a}$.

Cazul II. Pentru ca $x_2 = \frac{b-c}{b-a}$ să fie rădăcină şi a primei ecuaţii, trebuie să avem condiţia:

$$a\left(\frac{b-c}{b-a}\right)^2 + 2b\frac{b-c}{b-a} + c = 0$$

$$\ast\ast\ast \quad a(b-c)^2 + 2b(b-c)(b-a) + c(b-a)^2 = 0$$

$$\ast\ast\ast \quad (b-c)[a(b-c) + b(b-a)] +$$
$$(b-a)[b(b-c) + c(b-a)] = 0$$

sau:

$$(b-c)(b^2 - ac) + (b-a)(b^2 - ac) = 0$$

$$\ast\ast\ast \quad (b^2 - ac)(2b - a - c) = 0,$$

ceia-ce ne dă:

$$2b - a - c = 0 \text{ sau } b^2 - ac = 0$$

Dacă, $2b - a - c = 0$, rezultă că:

$$\frac{b-c}{b-a} = -1,$$

adică ecuaţia 2-a are o rădăcină dublă, suntem deci în cazul I.

Dacă:

$$b^2 - ac = 0,$$

atunci, putem spune că *prima ecuţie are o rădăcină dublă,* $-\frac{b}{a}$.

A 2-a ecuaţie are rădăcinele $-\frac{b}{a}$, -1.

Aşa dar dacă ecuaţiile date au o rădăcină comună, putem afirma că una oricare din ele are o rădăcină dublă.

Soluții date de d-nii: *Katz Pincu* (Galați), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Simionescu D. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Stefănescu Emil* (Șc. Polit., București) și *Tăraș Vasile* (lic, Brașov).

254. — *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$x^4 + 5a(x^3 + a^3) + 10a^2x(x + a) = 0$$

MAIOR O. BUGEANU

Ecuațiunea se poate scrie:

$$x^4 + 5ax^3 + 10a^2x^2 + 10a^3x + 5a^4 = 0$$

Multiplicând cu x, apoi adunând și scăzând a^5, avem:

$$x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 - a^5 = 0$$

$$(x + a)^5 = a^5$$

De unde:

$$x + a = \left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right),$$

$$k = -2, -1, 0, 1, 2,$$

sau:

$$x = a\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} - 1\right),$$

$$k = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Pentru $k = 0$, avem $x = 0$, soluție străină, căci nu verifică ecuația dată. Pentru $k = 1$, avem:

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

și atunci:

$$x_1 = \frac{a}{4}\left(-5 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$$

Pentru $k = -1$;

$$x_2 = \frac{a}{4}\left(-5 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$$

Pentru $k = 2$, avem:

$$\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

și atunci:

$$x_3 = \frac{a}{4}\left(-5 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$$

Pentru $k = -2$, avem:

$$x_4 = \frac{a}{4}\left(-5 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$$

Generalizare. Să se rezolve ecuația:

$$x^{n-1} + C_n^1 a x^{n-2} + C_n^2 a^2 x^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + C_n^p a^p x^{n-p-1} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} = 0$$

Aceasta ecuație se poate scrie:

$$(x + a)^n - a^n = 0,$$

de unde:

$$x = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} - 1\right)$$

$$k = 1, 2, \ldots n - 1$$

$k = 0$, se lasă la o parte căci ne ar da rădăcina străină $x = 0$.

Soluții date de d-nii: *Basacov Gh.* (stud. București), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *David Gheorghe* (stud. Cluj), *I. N. Georgescu Val., Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Pătraianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Niculae* (lic. Câmpina), *Popovici Th. Ioan, Popovici Tiberiu* (stud. București), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stefănescu Emil* (Șc. Polit., București), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

256. — *n jucători convin că acel ce câștigă să primească de la fiecare din ce lalți jucători atât cât are el înainte de a câștiga. Ei joacă n partide și câștigă fiecare câte una. Știind că s'au retras fiecare cu aceiași suma a, să se afle cu ce sumă s'au așezat fiecare la joc.*

V. ALACI

Insemnăm cu $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n$ sumele cu care s'au așezat la joc jucătorii ce au câștigat respectiv partidele $1, 2, \ldots i, \ldots n$.

Următorul tablou ne înfățișează sumele fiecărui jucător după fiecare partidă jucată:

. . .	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
1	$n\,x_1$	$x_2 - x_1$	. . .	$x_i - x_1$	. . .	$x_n - x_1$
2	$(n+1)\,x_1 - x_2$	$n\,(x_2 - x_1)$	. . .	$x_i - x_2$	. . .	$x_n - x_2$
. . .	. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . .	. . . . .
i	$(n+1)\,x_1 - x_i$	$(n+1)\,x_2 - n\,x_1 - x_i$	. . .	$n\,(x_i - x_{i-1})$	. . .	$x_n - x_i$
. . .	. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . .	. . . . .
n	$(n+1)\,x_1 - x_n$	$(n+1)\,x_2 - n\,x_1 - x_n$	. . .	$(n+1)\,x_i - n\,x_{i-1} - x_n$	. . .	$(n+1)\,x_n - n\,x_{n-1} - x_n$

Conform enunţului însă, fiecare sumă din ultimul şir este egală cu a, astfel că obţinem următorul sistem:

$$\begin{cases} (n+1)\,x_1 - x_n = a \\ (n+1)\,x_2 - n\,x_1 - x_n = a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)\,x_i - n\,x_{i-1} - x_n = a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)\,x_n - n\,x_n - x_n = a \end{cases}$$

Din prima ecuaţie aflăm pe x_1, în funcţie de x_n, introducem această valoare în ecuaţia doua şi aflăm pe x_2, şi aşa mai departe, obţinem:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + x_n}{n+1} \\ x_2 = (a + x_n)\left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n}{(n+1)^2}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = (a + x_n)\left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{n^{i-1}}{(n+1)^i}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (a + x_n)\left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^n}\right] \end{cases}$$

Mai putem scri încă:

$$(1) \qquad x_i = (a + x_n)\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right], \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Pentru $i = n$, avem:

$$x_n = (a + x_n)\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]$$

sau:

$$x_n\left[1 - 1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] = a\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]$$

$$* * * \qquad x_n = a\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1\right]$$

Substituind această valoare în (1), găsim:

$$x_i = \left\{a + a\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1\right]\right\}\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^i\right],$$

sau:

$$x_i = a\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\ i}\right], \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Această formulă exprimă sumele cu care s'au aşezat la joc fiecare din cei n jucători, luând succesiv $i = 1, 2, \ldots n$.

Soluţii date de d-nii: *Heimer Samuel* (lic. Botoşani), *Katz Pincu* (Galaţi), *Manolescu I. Nicolea* (Focşani), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Polacsek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Rădulet B. Remus* (Şc. Polit., Timişoara), *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Tărăbuţa C. Paul* (Bucureşti) şi *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi).

511 *). — *Să se arate că în orice triunghiu isoscel* $(a = b)$, *există relaţia:*

$$\Sigma\, a\, h_a\, r_a - 2\,(p - c)\,\Sigma\, r_a\, r_b = 2\,a\,p\,(c - b)$$

CALIN M. GHEORGHE

Folosind relaţiile cunoscute:

$$a\,h_a = 2\,s, \quad r_a = \frac{1}{p-a}, \quad r_b = \frac{1}{p-b},$$

$$s^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c), \quad a + b + c = 2\,p,$$

primul membru al relaţiei date pe care s'ăl însemnăm cu E, se poate scri succesiv:

$$E = 2\,s^2 \sum \frac{1}{p-a} - 2\,(p-c)\,s^2 \sum \frac{1}{(p-a)\,(p-b)} =$$

$$2\,p \sum (p-b)\,(p-c) - 2\,p\,(p-c) \sum (p-c) =$$

$$2\,p\,[(p-b)\,(p-c) + (p-c)\,(p-a) +$$

$$(p-a)\,(p-b)] - 2\,p^2\,(p-c) =$$

$$2\,p\,[(p-b)\,(p-c+p-a) + (p-c)\,(p-a-p)] =$$

$$2\,p\,[(p-b)\,b - (p-c)\,a]$$

*) Enunţ complectat.

Cum prin ipoteză:

$$b = a,$$

mai putem scri:

$$E = 2ap(p - b - p + c) = 2ap(c - b)$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Bey M. Gheorghe* (lic. Buzești, Craiova), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Cernes A. M.* (Iași), *Dărmănescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Iauculescu Octaviau* (Șc. mil. de Pilotaj și Antrenament), *Ionescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Manolescu I. N.* (Focșani), *Popescu N. Cornelia* (lic. Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Rapeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Sobel Mircea* (lic. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aurelia* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic Timișoara) și *Vlădea Ioan* (lic. Brașov).

517. — *Să se afle convergența și suma seriei cu termenul general:*

$$u_n = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)a^n}{1.2.3.(b+c)^{n+3}}$$

RAPEANU N. VIRGIL

Criteriul de convergență a lui *D'Alembert*, ne conduce a scrie:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{(n+1)(n+2)(n+3)a^n}{1.2.3.(b+c)^{n+3}} \cdot$$

$$\frac{1.2.3.(b+c)^{n+2}}{n(n+1)(n+2)a^{n-1}} = -\frac{a}{b+c} \cdot \frac{n+3}{n} =$$

$$-\frac{a}{b+c}\left(1+\frac{3}{n}\right),$$

deci:

$$\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{a}{b+c}.$$

Dacă:

$$(1) \qquad \left|-\frac{a}{b+c}\right| < 1,$$

seria dată este convergentă.

Presupunem această condiție împlinită și ne propunem a calcula acum suma seriei:

Pentru aceasta consider seria:

$$(2) \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

valabilă numai pentru:

$$|x| < 1.$$

Dacă în (2) luăm:

$$m = -4, \quad x = \left|\frac{a}{b+c}\right| < 1$$

avem:

$$\frac{(b+c)^4}{(a+b+c)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4.5.6\ldots(n+3)a^n}{n!(b+c)^n}$$

sau:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)a^n}{1.2.3.(b+c)^{n+3}} = \frac{(b+c)}{(a+b+c)^4}$$

Seria dată este deci insumată, sub condiția (1).

Soluții date de d-nii: *Iacob Șt. Eugen* (lic. Botoșani), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Podariu Al.*, *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

522. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\cos^2[x+2a(n+1)]\cos^2[x+2a(n-1)]\sum_{k=0}^{n}\sin(x+4ak) =$$

$$2\cos^2 2a \sin 2(x+2an)\sum_{k=0}^{n}\cos(x+4ak)$$

EUGENIU GRABOVSCHI

Ținând seamă că:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(x+4ak) = \frac{\sin 4a(n+1)\sin(x+2an)}{\sin 2a}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+4ak) = \frac{\sin 4a(n+1)\cos(x+2an)}{\sin 2a},$$

ecuația dată se poate scrie:

$$\cos^2[x+2a(n+1)]\cos^2[x+2a(n-1)]\sin(x+2an) =$$

$$2\cos^2 2a \sin 2(x+2an)\cos(x+2an)$$

Cum:

$$\sin 2(x+2an) = 2\sin(x+2an)\cos(x+2an),$$

ecuația se mai poate scrie:

$$\sin(x+2an)\{\cos^2[x+2a(n+1)]\cos^2[x+$$

$$2a(n-1)] - 4\cos^2 2a \cos^2(x+2an)\} = 0,$$

care se descompune în :

$$\sin(x+2an)=0, \text{ deci } x+2an=k\pi, \text{ adică}$$

$$x_1=k\pi-2an$$

și :

$$\cos^2[x+2a(n+1)]\cos^2[x+2a(n-1)]=$$
$$4\cos^2 2a\cos^2(x+2an)$$

Să rezolvăm această ecuație, putem scri :

$$(1)\quad \cos[x+2a(n+1)]\cos[x+2a(n-1)]=$$
$$\pm 2\cos 2a\cos(x+2an)$$

Cum :

$$\cos(x+2an+2a)\cos(x+2an-2a)=$$
$$\frac{\cos 4a+\cos 2(x+2an)}{2},$$

ecuația (1) devine :

$$\cos 4a+\cos 2(x+2an)=\pm 4\cos 2a\cos(x+2an)$$

sau :

$$1-2\sin^2 2a+2\cos^2(x+2an)-1\mp$$
$$4\cos 2a\cos(x+2an)$$
$$^{*}{}^{*}{}_{*}\quad \cos^2(x+2an)\mp 2\cos 2a\cos(x+2an)+$$
$$\cos^2 2a=1$$

sau :

$$[\cos(x+2an)\mp\cos 2a]^2=1,$$

de unde :

$$\cos(x+2an)=\pm 1\pm\cos 2a$$

De aci deducem :

$$\cos(x+2an)=2\cos^2 a$$
$$\cos(x+2an)=-2\sin^2 a$$
$$\cos(x+2an)=2\sin^2 a$$
$$\cos(x+2an)=-2\cos^2 a$$

Sau :

$$x_2=-2an+\arccos(2\cos^2 a)$$
$$x_3=-2an+\arccos(-2\sin^2 a)$$
$$x_4=-2an+\arccos(2\sin^2 a)$$
$$x_5=-2an+\arccos(-2\cos^2 a)$$

Soluții date de d-nii : *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Manolescu I. N.* (Focșani), *Pascariu Alexe* (Șc. Polit., Timișoara), *Simionov Kindin, Vladimirschi Veneamin* (lic. Tighina) și *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

532. — *Notațiile fiind cele cunoscute într'un triunghiu, să se stabilească relația :*

$$\frac{(r-h_a)(r-h_b)}{(r+r_a)(r+r_b)(r-r_c)}+\frac{(r-h_b)(r-h_c)}{(r+r_b)(r+r_c)(r-r_a)}+$$
$$\frac{(r-h_c)(r-h_a)}{(r+r_c)(r+r_a)(r-r_b)}=-\frac{3}{4R}$$

IOAN TH. IONESCU BUJOR.

Folosind următoarele relațiuni cunoscute :

$$h_a=\frac{2s}{a},\ h_b=\frac{2s}{b},\ r=\frac{s}{p},\ r_a=\frac{s}{p-a},$$

$$r_b=\frac{s}{p-b},\ r_c=\frac{s}{p-c},$$

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ și } abc=4Rs,$$

putem scrie :

$$(1)\quad (r-h_a)(r-h_b)=\left(\frac{s}{p}-\frac{2s}{a}\right)\left(\frac{s}{p}-\frac{2s}{b}\right)=$$
$$\frac{s^2(a-2p)(b-2p)}{p^2ab}=\frac{r^2(b+c)(a+c)}{ab}$$

$$(2)\quad (r+r_a)(r+r_b)(r-r_c)=$$
$$\left(\frac{s}{p}+\frac{s}{p-a}\right)\left(\frac{s}{p}+\frac{s}{p-b}\right)\left(\frac{s}{p}-\frac{s}{p-c}\right)=$$
$$\frac{s^3(2p-a)(2p-b)(-c)}{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{s(b+c)(a+c)(-c)}{p^2}=$$
$$-\frac{rc(b+c)(c+a)}{p}$$

Divizand relația (1) cu (2), obținem :

$$(3)\quad \frac{(r-h_a)(r-h_b)}{(r+r_a)(r+r_b)(r-r_c)}=-\frac{pr}{abc}=-\frac{1}{4R}$$

Analog, găsim :

$$(4)\quad \frac{(r-h_b)(r-h_c)}{(r+r_b)(r+r_c)(r-r_a)}=-\frac{1}{4R}.$$

$$(5)\quad \frac{(r-h_c)(r-h_a)}{(r+r_c)(r+r_a)(r-r_b)}=-\frac{1}{4R}$$

Adunând relaţiile (3), (4), (5), găsim:

$$\sum \frac{(r-h_b)(r-h_c)}{(r+r_b)(r+r_c)(r-r_a)} = -\frac{3}{4R},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Albeaţă N. Ermil* (lic. Piatra-Neamţ), *D'Albon A.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ardelea Radu* (lic. Craiova), *Atanasiu C-tin* (Bolgrad), *Bălăsescu N. C.*, *Catz Boruh* (lic. Cahul), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Curcubată Dionisie*, *Dânga S. Vlad* (Şc. Polit, Timişoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dordea Nicolae* (lic. Sibiu), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Dumitrescu Nathalia* (Şc. Normală, Bucureşti), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu S. Gh.* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gradin I. Alexandru* (lic. Câmpina), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Iancu-lescu Oc avian* (Şc. Milit. de Pilotaj şi Antrenament), *Ionescu M. Harambe* (lic. Piteşti), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Isăcescu C. Titi* (lic. Tg.-Jiu), *Manolescu I. N.* (Focşani), *Mara Ş efan*, *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mocuţa Traian* (lic. Arad), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir), *Novacu Valeriu* (lic, Arad), *Olte.uu Nicu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pascu Silviu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamţ), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Popluca G. Mircea* (lic. Arad), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *St.n I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Stan I. C.* (lic. Roman), *Steriade C.* (lic. Piteşti), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti). *Stoicoiu M. Traian* (lic. Tg.-Jiu), *Tudor Romulus* (lic. Arad), *Ianovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Tava, Bucureşti), *Vladimirschi V.* (lic. Tighina), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi) şi *Zagoican Ilie* (Şc. de Co.ductori, Chişinău).

PROBLEME PROPUSE

571. — Să se arate că fiecare din expresiunile:

$$E_1 = 9^{999} + 8^{888} + \ldots + 2^{222} - 1$$

$$E_2 = 9^{111} + 8^{222} + \ldots + 2^{888} - 1,$$

este divizibilă cu 5.

POPOVICI C. C-TIN

572*. — Să se găsiască numărul întreg N divizibil prin numerele întregi a, b, c, ştiind că N este egal cu suma câturilor sale prin cei 3 divizori.

COL. GH. BUICLIU

573. — Fie dat un triunghiu A B C şi un punct D în planul său. Se duc dreptele D B şi D C pe care se proectează vârful A în A_1 şi A_2. Se proectează apoi punctul D pe laturile A B şi A C în D_1 şi D_2.

Cum trebuie să fie triunghiul A B C şi cum trebuie găsit punctul D astfel ca exagonul $A A_1 D_2 D A_2 D_1$ să fie regulat.

C-TIN TH. IONESCU BUJOR

574. — Prin vârfurile unei conice se duc paralele asimptotelor. Să se arate că mijlocul segmentului de dreaptă dus prin unul din vârfuri şi cuprins între acele paralele se găseşte pe conică.

GHEORGHE DAVID

575. — Să se rezolve în numere întregi şi pozitive sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ 4x + 5y + 6z = 30 \end{cases}$$

CORNELIU POPESCU

576. — Se cere minimul expresiei:

$$E = x\sqrt{x^2 + y^2}$$

ştiind că:

$$x^2 y = a \text{ (constant)}.$$

BESCHEA NICOLAE

577*. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2 2(k+1)t \cos(2k+1)t + \cos t \sum_{k=1}^{n} \sin kt \sin(4k+2)t = \frac{\sin^2 2(n+1)t - \sin^2 2t}{2 \sin t}$$

V. ALACI

578*. — Segmentul de dreaptă $ON = a$ se împarte în n părţi egale, şi în fiecare punct de diviziune începând din O facem să lucreze fo.ţe, respectiv proporţionale cu numerile: $1^3, 2^3, 3^3, \ldots n^3$. Să se determine centrul de greutate a acestor forţe şi poziţia sa când n creşte indefinit.

GRADIN I. GHEORGHE

INFORMAȚIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

——

A apărut „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

A apărut, *Curs de rezistența materialelor*, de d-l *Constantin C. Teodorescu*, Inginer-Șef, profesor la Școala Politechnică din *Timișoara*. Acest curs cuprinde lecțiunile făcute de autor, cu studenții anului II și III ai Școalei Politechnice din *Timișoara*.

Tipărit într'o formă foarte îngrijită și clară, cu numeroase figuri ireproșabil construite, cartea este menită a fi de un real folos studenților noștri technici și tuturor acelor ce vor să aibă un tratat clar, concis și complect de *rezistența materialelor*.

——

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 OCTOMBRIE 1926 NO. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GHEORGHE I. GRADIN. ASUPRA UNOR CLASE DE IDENTITATI TRIGONOMETRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 15, 16.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 530, 538 547, 552, 554, 555.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNOR CLASE DE IDENTITAȚI TRIGONOMETRICE

de GHEORGHE I. GRADIN

In R. M. T., An. II, pagina 45, d-l *Georgescu Roegen*, stabilește câteva relațiuni interesante în legătură cu un triunghiu oarecare.

In cele ce urmează îmi propun a stabili alte expresii folosind aceiași metodă.

1. Considerăm identitatea:

(1) $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=1.$

Intre unghiuri avem relațiunea:

$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=\pi$$ putem scrie:

(2) $$\hat{a}=\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{2}\quad \hat{b}=\frac{\pi}{2}-\frac{a_2}{2}\quad \hat{c}=\frac{\pi}{2}-\frac{a_3}{2}.$$

In virtutea relațiilor (2) expresia (1) devine:

(3) $$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_2}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_3}{2}\right)$$
$$+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_3}{2}\right)=1.$$

Ținând seamă că:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{2}\right)=\sin\frac{a_1}{2},\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a_2}{2}\right)=\sin\frac{a_2}{2}\ldots\text{etc.}$$

Expresia (3) devine:

$$\sin^2\frac{a_1}{2}+\sin^2\frac{a_2}{2}+\sin^2\frac{a_3}{2}+2\sin\frac{a_1}{2}.\sin\frac{a_2}{2}.\sin\frac{a_3}{3}=1$$

sau, $$\sum_{i=1}^{3}\sin^2\frac{a_i}{2}+2\prod_{i=1}^{3}\sin\frac{a_i}{2}=1.$$

2. Identitatea trigonometrică:

(1) $$\frac{1}{s}=\frac{\operatorname{ctg}A}{h_a^2}+\frac{\operatorname{ctg}B}{h_b^2}+\frac{\operatorname{ctg}C}{h_c^2}$$

transformată prin formule devine.

Dacă, $A+B+C=\pi$ putem scrie:

(2) $$A=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right)B=\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\ldots\text{etc.}$$

Relația (1) devine, ținând seamă de (2):

$$\frac{1}{s}=\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right)}{h_a^2}+\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)}{h_b^2}+\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_3}{2}\right)}{h_c^2}.$$

Dar:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{A_1}{2};\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{A_2}{2}\ldots\text{etc.}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{s}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A_1}{2}}{h_a^2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{A_2}{2}}{h_b^2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{A_3}{2}}{h_c^2},$$

sau, $$\sum_{i=1}^{3}\frac{\operatorname{tg}\frac{A_1}{2}}{h_a^2}=\frac{1}{s}.$$

3. *a)* Asupra triunghiurilor în care laturile sunt în proporție armonică, există relația (R. M. T., an. II):

$$\frac{2}{\sin B}=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin C}.$$

Ținând seamă de relația:

$A+B+C=\pi$ avem:

$$A=\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\quad B=\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\ldots$$

$$\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_3}{2}\right)}.$$

Ţinând seamă că:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right)=\cos\frac{A_1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)=\cos\frac{A_2}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_3}{2}\right)=\cos\frac{A_3}{2}$$

putem scrie:

$$\frac{2}{\cos\frac{A_2}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{A_1}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{A_3}{2}}$$

sau:

$$2\sec\frac{A_2}{2}=\sec\frac{A_1}{2}+\sec\frac{A_3}{2}.$$

b) (1) $2\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}=\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}.$

Ştiind că $A+B+C=\pi$, avem evident relaţiile stabilite:

$$A=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right);\quad B=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)\ldots \text{ etc.}$$

$$\therefore\quad \frac{A}{2}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_2}{4}\right);\quad \frac{B}{2}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_2}{4}\right)\ldots$$

$$(2)\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_1}{4}-\sin\frac{A_1}{4}\right)\\ \sin\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_2}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_2}{4}-\sin\frac{A_2}{4}\right)\\ \sin\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_3}{4}-\sin\frac{A_3}{4}\right)\end{cases}$$

$$(3)\quad \cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_1}{4}+\sin\frac{A_1}{4}\right)$$

. . . . . .

Conform relaţiilor (2) şi (3) putem scrie:

$$(4)\quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)}=$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_1}{4}+\sin\frac{A_1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_1}{4}-\sin\frac{A_1}{4}\right)}=\frac{\cos\frac{A_1}{4}+\sin\frac{A_1}{4}}{\cos\frac{A_1}{4}-\sin\frac{A_1}{4}}$$

Conform relaţiilor ce ne dau expresiuni calculabile prin logaritmi — din trigonometrie — avem

$$(5)\begin{cases}\cos\frac{A_1}{4}-\sin\frac{A_1}{4}=2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{4}-\frac{A_1}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{4}+\frac{A_1}{4}}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)\\ \cos\frac{A_1}{4}+\sin\frac{A_1}{4}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\frac{A_1}{4}-\frac{A_1}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\frac{A_1}{4}+\frac{A_1}{4}}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)\end{cases}$$

Ţinând seamă de relaţiile (4) şi (5) relaţia (1) devine:

$$2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_2}{2}\right)=\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_1}{4}\right)+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A_3}{4}\right).$$

4. Identitatea trigonometrică:

1) $\Sigma\sin 2A\sin 2B+2\Sigma\sin^2 A=4\Sigma\sin^2 A\sin^2 B$

prin relaţiile de transformare devine.

Ştiind că:

$$A+B+C=\pi$$

$$A=\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\quad B=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)\quad C=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_3}{2}\right)$$

$$2A=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2}\right);\quad 2B=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_2}{2}\right)$$

şi

$$2C=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A_3}{2}\right).$$

Aplicând sinusurile în ambele părţi avem:

(2) $$\begin{cases} \sin 2A = \sin(\pi - A_1) = \sin A_1 \\ \sin 2B = \sin(\pi - A_2) = \sin A_2 \end{cases}$$

. . . . . .

(3) $$\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \cos\frac{A_1}{2}$$

Ţinând seamă de relaţiunile (2) şi (3) relaţia (1) devine:

$$\Sigma \sin A_1 \sin A_2 + 2\Sigma\cos^2\frac{A_1}{2} = 4\Sigma\cos^2\frac{A_1}{2}\cdot\cos^2\frac{A_3}{2}.$$

5. Ţinând seamă că:

$$A + B + C = \pi, \qquad \text{şi că:}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right);\ B = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right);\ C = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{3}\right)$$

precum şi:

$$2A = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \pi - A_1$$

$$2B = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right) = \pi - A_2$$

. . . . . .

Ţinând seamă de transformările din exemplu precedent şi de următoarea relaţie, avem:

$$\therefore\ \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \sin\frac{A_1}{2};$$

. . . . . .

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{A_1}{2}$$

. . . . . .

Expresia trigonometrică:

$$\frac{bc\sin 2A + ac\sin 2B + ab\sin 2c}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = a\operatorname{cotg} A + b\operatorname{cotg} B + c\operatorname{cotg} C$$

devine:

$$\therefore\ \frac{bc\sin A_1 + ac\sin A_2 + ab\sin A_3}{a\sin\frac{A_1}{2} + b\sin\frac{A_2}{2} + c\sin\frac{A_3}{2}} = a\operatorname{tg}\frac{A_1}{2} + b\operatorname{tg}\frac{A_2}{2} + c\operatorname{tg}\frac{A_3}{2}$$

sau,

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} bc\sin A_1}{\sum_{i=1}^{3} a\sin\frac{A_1}{2}} = \sum_{i=1}^{3} a\operatorname{tg}\frac{A_i}{2}$$

6. E stabilit că dacă:

$$a + b + c = \pi,$$

putem scrie:

$$a = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right);\ b = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right);\ c = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{3}\right)$$

aşa că expresia trigonometrică:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos A}{h_a} + \frac{\cos B}{h_b} + \frac{\cos C}{h_c}$$

şi:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\cos A}{r_a} + \frac{\cos B}{r_b} + \frac{\cos C}{r_c}$$

devine:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\sin\frac{A_1}{2}}{h_a} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\sin\frac{A_1}{1}}{r_a}.$$

Intr'adevăr:

$$\cos A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \sin\frac{A_1}{2}$$

$$\cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right) = \sin\frac{A_2}{2}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin\frac{A_1}{2}}{h_a} + \frac{\sin\frac{A_2}{2}}{h_b} + \frac{\sin\frac{A_3}{2}}{h_c} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\sin\frac{A_1}{2}}{h_a}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\sin\frac{A_1}{2}}{r_a} + \frac{\sin\frac{A_2}{2}}{r_b} + \frac{\sin\frac{A_3}{2}}{r_c} = \frac{1}{R} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\sin\frac{A_1}{2}}{r_a}$$

7. Dacă $a + b + c = \pi$ şi

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2};\ B = \frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\ldots$$

Identitatea trigonometrică:

$$p = a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} + c\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

va lua forma:

$$p = \Sigma a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4}\right) \cos\frac{A_3 - A_2}{4}.$$

Conform celor de mai sus avem:

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{B}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{A_2}{4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A_1}{4} - \sin\frac{A_1}{4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{B-C}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{3}\right)}{2} = \frac{A_3 - A_2}{4}$$

$$\frac{C-A}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right)}{2} = \frac{A_1 - A_3}{4}$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right)}{2} = \frac{A_2 - A_1}{4}$$

$$a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\cos\frac{A_1}{4} - \sin\frac{A_1}{4}\right)\cos\frac{A_3-A_2}{4}$$

$$b\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b\left(\cos\frac{A_2}{4} - \sin\frac{A_2}{4}\right)\cos\frac{A_1-A_2}{4}$$

$$c\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\left(\cos\frac{A_3}{4} - \sin\frac{A_3}{4}\right)\cos\frac{A_2-A_1}{4}$$

Atunci:

$$p = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[a\left(\cos\frac{A_1}{4} - \sin\frac{A_1}{4}\right)_{\cos\frac{A_3-A_2}{4}} + b\left(\cos\frac{A_2}{4} - \sin\frac{A_2}{4}\right)_{\cos\frac{A_1-A_3}{4}} + c\left(\cos\frac{A_3}{4} - \sin\frac{A_4}{4}\right)\cos\frac{A_2-A_1}{4}\right]$$

știm că putem scrie:

$$\cos\frac{A_1}{4} - \sin\frac{A_1}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4}\right)$$

$$p = \sum \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4}\right)\cos\frac{A_3 - A_2}{4}.$$

8. Fie relația:

$$\frac{\sin^n(A+B)}{\sin^{2n}C} + \frac{\sin^n(B+C)}{\sin^{2n}A} + \frac{\sin^n(C+A)}{\sin^{2n}B} = \frac{h_a^n + h_b^n + h_c^n}{s^n}R^n,$$

știind că $A+B+C=\pi$ avem:

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right), \quad B = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right)\cdots$$

$$A+B = \frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{B_1}{2} = \pi - \frac{A_1+A_2}{2}$$

$$\sin^n(A+B) = \sin^n\left[\pi - \frac{A_1+A_2}{2}\right] = \sin^n\frac{A_1+A_2}{2}$$

Analog:

$$\sin^n(B+C) = \sin^n\left[\pi - \frac{A_2+A_3}{2}\right] = \sin^n\frac{A_2+A_3}{2}$$

$$\sin^n(C+A) = \sin^n\left[\pi - \frac{A_3+A_1}{2}\right] = \sin^n\frac{A_3+A_1}{2}$$

$$\sin^{2n}A = \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}\right) = \cos^{2n}\frac{A_1}{2}$$

$$\therefore \quad \sin^{2n}B = \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}\right) = \cos^{2n}\frac{A_2}{2}$$

Relația propusă devine:

$$\sin^{2n}C = \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{2}\right) = \cos^{2n}\frac{A_3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin^n\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)}{\cos^{2n}\frac{A_3}{2}} + \frac{\sin^n\frac{A_2+A_3}{2}}{\cos^{2n}\frac{A_1}{2}} + \frac{\sin^n\frac{A_1+A_3}{2}}{\cos^{2n}\frac{A_2}{2}} = \frac{h_a^n + h_b^n + h_c^n}{s^n}R^n$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\sin^n\frac{A_i+A_{i+1}}{2}}{\cos^{2n}\frac{A_{i+2}}{2}} = R^n\Sigma\left(\frac{h_a}{s}\right)^n.$$

9. Există o infinitate de triunghiuri cari satisfac relaţia :

(1) $$2 \sin A \sin B = \cos C.$$

Vom arăta că ea poate lua şi forma :

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

Intr'adevăr :

$$\therefore \quad A + B + C = \pi$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}; \quad B = \frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2} \ldots$$

$$\sin A = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2} \right) = \cos \frac{A_1}{2}$$

$$\sin B = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2} \right) = \cos \frac{A_2}{2}$$

. . . . . .

Relaţia (1) devine :

$$\cos C = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{2} \right) - \sin \frac{A_3}{2}$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

10. Expresia trigonometrică :

$$E = \frac{s^2}{p^4} \Sigma \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \Sigma \frac{4R}{s} \cos^2 \frac{A}{2}$$

ţinând seamă că $A + B + C = \pi$ devine :

$$E = \frac{s^2}{p^4} \Sigma \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{4} \right) \Sigma \frac{4R}{s} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)$$

Intr'adevăr :

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2} \right); \quad \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2} \right) \ldots$$

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4} \right)} =$$

$$\frac{\cos \frac{A_1}{4} + \sin \frac{A_1}{4}}{\cos \frac{A_1}{4} - \sin \frac{A_1}{4}} = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4} \right)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{A_1}{4} + \sin \frac{A_1}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A_1}{4} \right)$$

$$E = \frac{s^2}{p^4} \Sigma \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right) \Sigma \frac{4R}{s} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right).$$

Exemplele tratate învederează formarea unei clase de identităţi trigonometrice obţinute printr'un procedeu de transformare foarte simplu.

NOTE MATEMATICE

15. *Generalizarea problemei 239 din R. M. T.* Fie $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$, $\operatorname{tg} \alpha_3 \ldots \operatorname{tg} \alpha_n$ rădăcinile ecuaţiei :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Să se calculeze valoarea expresiunei :

$$E = 2 \cos^2 \left[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n - \frac{\pi}{4} \right]$$

în funcţie de coeficienţii : a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$.

Observăm că putem scrie succesiv :

$$E = 1 + \cos \left[2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$1 + \sin 2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) =$$

$$1 + 2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

$$= 1 + 2 \frac{\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}{1 + \operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}$$

Dar :

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 \ldots}{1 - T_2 + T_4 \ldots}$$

în care :

$$T_i = \Sigma \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \ldots \operatorname{tg} \alpha_i .$$

Ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi avem :

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \frac{- a_1 + a_3 - a_5 \ldots}{1 - a_2 + a_4 - a_6 \ldots}.$$

Atunci:

$$E = 1 + \frac{2\dfrac{-a_1+a_3-a_5\ldots}{1-a_2+a_4-a_6\ldots}}{1+\left[\dfrac{-a_1+a_3-a_5\ldots}{1-a_2+a_4-a_6\ldots}\right]^2} =$$

$$1+\frac{2(-a_1+a_3-a_5\ldots)(1-a_2+a_4\ldots)}{(1-a_2+a_4-a_6\ldots)^2+(-a_1+a_3-a_5\ldots)^2}$$

$$E=\frac{[1-(a_1+a_2)+(a_3+a_4)-(a_5+a_6)\ldots]^2}{[1-a_2+a_4-a_6\ldots]^2+[-a_1+a_3-a_5\ldots]^2}$$

tocmai ce trebuia să arătăm:

Avem deasemenea:

$$2\sin^2\left[a_1+a_2+\ldots+a_n-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$\frac{[1+a_1-(a_2+a_3)+(a_4+a_5)\ldots]^2}{[1-a_2+a_4-a_6]^2+[-a_1+a_3-a_5\ldots]^2}$$

și:

$$\operatorname{tg}^2\left[a_1+a_2+\ldots+a_n-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$\left[\frac{1-a_1+(a_2+a_3)-(a_4+a_5)\ldots}{1-(a_1+a_2)+(a_3+a_4)-(a_5+a_6)}\right]^2$$

care generalizează relațiile deduse.

ANGELESCU N. TRAIAN

16. *Asupra unei chestiuni de maxim.* (Generalizare).

Ne propunem a calcula maximul funcțiunii:

$$y=\prod_{i=1}^{2(2n+1)}\operatorname{arc\,tg}\,x_i$$

știind că $x_1, x_2, \ldots x_{4n+2}$, sunt rădăcinile ecuației:

$$x^{4n+2}+p\,x^{4n+1}+p\,x^{4n}+\ldots+p\,x+p+1=0.$$

Dacă notăm:

$$\operatorname{arc\,tg}\,x_i=a_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots 4n+2) \tag{1}$$

urmează că avem de calculat maximul produsului:

$$y=\prod_{i=1}^{2(2n+1)}a_i.$$

Insă suma factorilor acestui produs este constantă. Pentru a dovedi aceasta vom folosi formula:

$$\operatorname{tg}\Sigma a_1=\frac{\Sigma\operatorname{tg}a_1-\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3+\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3\operatorname{tg}a_4\operatorname{tg}a_5-\ldots+\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\ldots\operatorname{tg}a_{4n+1}}{1-\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2+\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3\operatorname{tg}a_4-\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\ldots\operatorname{tg}a_6+\ldots-\Sigma\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2\ldots\operatorname{tg}a_{4n+1}}$$

Deducând din (1) că:

$$\operatorname{tg}a_i=x_i$$

putem scri succesiv, ținând seama de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației date:

$$\operatorname{tg}\Sigma a_1=\frac{(-p)-(-p)+(-p)-\ldots+(-p)}{1-p+p-p+\ldots-(p+1)}=\frac{-p}{-p}=1$$

și deci:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{4n+2}=k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

Suma acestor factori fiind constantă, produsul lor va fi maxim când factorii vor fi egali; deci când:

$$a_1=a_2=\ldots=a_{4n+2}=\frac{(4k+1)\pi}{8(2n+1)}$$

și atunci:

$$y_{\max.}=\left[\frac{(4k+1)\pi}{8(2n+1)}\right]^{2(2n+1)}.$$

Pentru $n=0$ dăm peste cazul studiat în problema 436, R. M. T., No. 4, 1926.

RADULESCU C. MIHAIL

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 1, Septembrie 1926. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice". Neegalități trigonometrice, de *I. Ionescu*. Soluția geometrică a problemei 3105, de *Col. Gh. Buicliu*. Premiul *„Inginer H. Capriel"*.

2. *Curierul Matematic*, vol. II, No. 8, Octombrie 1926. Asupra câtorva cercuri remarcabile într'un triunghiu de, *C. Ionescu Bujor*.

3. *Algebra* pentru clasa V Reală de, *Al. Manicatide*, revăzută și adăogită de, *N. Abramescu*, profesor la Universitatea din Cluj. Cartea este clară, metodic expusă din punct de vedere teoretic și înzestrată cu numeroase aplicații și exerciții, ceiace face să fie o carte clasică. O recomandăm călduros corespondenților noștri și tuturor celor ce vor să pătrundă și să stăpânească tainele algebrei. Apărută în Cluj, 1926, prețul 110 lei.

PROBLEME REZOLVATE

530. — *Să se determine p și q din ecuația:*

$$x^2 - px + q = 0,$$

astfel ca rădăcinele ei x' și x'' să satisfacă relațiile:

$$\sqrt{x'' + 10} = \frac{2x''}{3}, \quad x'' \sqrt[6]{256\,x'} = 12\,x'.$$

NATALIA DUMITRESCU

Ridicăm prima relație la patrat și avem:

$$x'' + 10 = \frac{4x''^2}{9} \quad \text{sau:} \quad 4x''^2 - 9x'' - 90 = 0.$$

Rezolvând această ecuație, găsim:

$$x'' = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{8} = \frac{9 \pm 39}{8}$$

$$\therefore \quad x'' = 6 \quad \text{și} \quad x'' = -\frac{15}{4}.$$

Vedem că numai $x'' = 6$ verifică prima relație.

Substituim această valoare în relația doua și o ridicăm apoi la puterea 6^a, avem:

$$12^6 x'^6 - 6^6 . 256\,x' = 0 \quad \text{sau:} \quad 12^6 x'^6 - 6^6 . 2^8 x' = 0$$

sau încă:

$$12^6 x' (x'^5 - 4) = 0$$

$$\therefore \quad x' = 0 \quad \text{și:} \quad x' = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right).$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ecuația dată are deci ca rădăcini:

$$x' = 0, \quad x'' = 6,$$

sau:

$$x' = \sqrt[5]{4}, \quad x'' = 6$$

sau încă:

$$x' = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), \quad x'' = 6.$$

Cum știm că suma rădăcinelor ecuației date este p și produsul lor q, rezultă pentru p și q respectiv valorile:

$$p = 6, \quad q = 6$$

$$p = 6 + \sqrt[5]{4}, \quad q = 6\sqrt[5]{4}$$

$$p = 6 + \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right),$$

$$q = 6\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Soluții date de: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Albeață N. Er.* (lic. P.-Neamț), *Bălășescu N. C.*, *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Carabețeanu Petre* (lic. Lazăr, București), *Cercel Șt. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ciolacu Miron* (Șc. Milit. Artilerie), *Cocorandu Dan* (Șc. Mllit. de Geniu), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iași), *Costinescu Antoaneta* (Instit. Ortodox, Iași), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dănciulescu Virgil* (lic. Craiova), *Dobrescu Ana* (București), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Dumitrescu T. Eug.* (lic. Buzău), *Faibovici I. Henri* (Craiova), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gheorghiu Th. Gh. orghe* (lic. Galați), *Ianculescu Octavian* (Șc. Milit. de Pilotaj și Antrenament), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Pitești), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Punțu I. Z.* (lic. Lazăr, București), *Manolescu I. N.* (Focșani), *Negruț Nelu* (lic. Buzău), *Nicolau A. Vasile* (lic. Matei Basarab), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Robu Ionel* (lîc. Arad), *Segărceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Simionov Kindin, Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stan C.* (lic. Roman), *Steriade C.* (lic. Pitești), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Timișoara), *Vladimirschi V.* (lic. Tighina), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București), *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău) *și Zamfrescu Gh. Ion* (lic. Pitești).

538. — *Să se stabilească următoarele identități:*

1°. $$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k} = 0$$

2°. $$1 + \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k C_{4p+1}^{2k} = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k-1}$$

3°. $$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+2}^{2k}=0$$

4°. $$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+3}^{2k}+\sum_{k=1}^{2p+2}(-1)^{k+1} C_{4p+3}^{2k-1}=0$$

GH. CONSTANTINESCU

1°. Primul membru se poate scri:

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k-1}=C_{4p}^{1}-C_{4p}^{3}+C_{4p}^{5}-\dots$$

$$\dots-C_{4p}^{4p-1}=(C_{4p}^{1}-C_{4p}^{4p-1})-(C_{4p}^{3}-C_{4p}^{4p-2})+\dots$$

$$\dots+(-1)^{p+1}(C_{4p}^{2p-1}-C_{4p}^{2p+1}).$$

Dar în virtutea relațiunei cunoscute din teoria combinărilor, anume:

$$(2)\quad C_m^n=C_m^{m-n}$$

în care facem $m=4p$ și $n=1, 3, 5, \dots 2p-1$, fiecare paranteză din ultimul membru al relației (2) este zero, astfel rezultă:

$$\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k-1}=0.$$

2°. Primul membru, în virtutea relației (2) unde luăm succesiv $m=4p+1$, $n=1, 2, 3, \dots 2p$, se poate scri, observând că $1=C_{4p+1}^{4p+1}$:

$$1+\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k C_{4p+1}^{2k}=C_{4p+1}^{4p+1}+\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k C_{4p+1}^{4p+1-2k}$$

$$=C_{4p+1}^{4p+1}-C_{4p+1}^{4p-1}+C_{4p+1}^{4p-3}-\dots+C_{4p+1}^{1}=$$

$$C_{4p+1}^{1}-C_{4p+1}^{3}+\dots-C_{4p+1}^{4p-1}-C_{4p+1}^{4p+1}=$$

$$\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k-1},$$

și astfel relația 2° este stabilită.

3°. Primul membru se poate scri succesiv:

$$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+2}^{2k}=1-C_{4p+2}^{2}+C_{4p+2}^{4}-\dots$$

$$\dots+C_{4p+2}^{4p}-C_{4p+2}^{4p+2}=(1-C_{4p+2}^{4p+2})-$$

$$(C_{4p+2}^{2}-C_{4p+2}^{4p})+\dots+(-1)^p(C_{4p+2}^{2p}-C_{4p+2}^{2p+2}).$$

Dar fiecare paranteză este nulă în virtutea relației (2) în care luăm succesiv, $m=4p+2$, $n=0, 2, \dots 2p$, astfel că rezultă:

$$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+2}^{2k}=0.$$

4°. Primul membru se poate scri succesiv:

$$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+3}^{2k}+\sum_{k=1}^{2p+2}(-1)^{k+1} C_{4p+3}^{2k-1}=$$

$$1-C_{4p+3}^{2}+C_{4p+3}^{4}-\dots+C_{4p+3}^{4p}-C_{4p+3}^{4p+2}+$$

$$C_{4p+3}^{1}-C_{4p+3}^{3}+\dots+C_{4p+3}^{4p+1}-C_{4p+3}^{4p+3}=$$

$$(1-C_{4p+3}^{4p+3})-(C_{4p+3}^{2}-C_{4p+3}^{4p+1})+\dots$$

$$\dots-(C_{4p+3}^{4p+2}-C_{4p+3}^{1}).$$

Dar în virtutea relației (2) în care luăm succesiv $m=4p+3$, $n=0, 2, 4, \dots 4p+2$, fiecare paranteză este nulă, astfel că rezultă:

$$1+\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k C_{4p+3}^{2k}+\sum_{k=1}^{2p+2}(-1)^{k+1} C_{4p+3}^{2k-1}=0.$$

Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ianculescu Octavian* (Șc. Milit. de Pilotaj si Antrenament), *Ionescu Th. Bujor C-tiu* (lic. Cantemir, București), *Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marius Maris* (lic. Arad), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Pantu I. Z.* (lic. Lazăr, București), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea) și *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București).

Altă soluție dată de d-l *Winkler A. Alfred.*

Folosim următoare formule cunoscute:

$$(1)\quad \sin ma=C_m^1\cos^{m-1}a\sin a-C_m^3\cos^{m-3}a\sin^3 a+..$$

$$(2)\quad \cos ma=\cos^m a-C_m^2\cos^{m-2}a\sin^2 a+\dots$$

Acum vom stabili pe rând relațiile date:

1°. Dacă în relația (1) facem, $m=4p$, $a=\frac{\pi}{4}$ și observăm că $\sin p\pi=0$, $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, avem:

$$0=C_{4p}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p}-C_{4p}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p}+\dots-C_{4p}^{4p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p},$$

sau:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p}(C_{4p}^1 - C_{4p}^3 + \ldots - C_{4p}^{4p-1}) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} C_{4p}^{2k-1} = 0.$$

2°. Facem în relațiile (2) și (1), $m = 4p+1$, $a = \frac{\pi}{4}$ și avem:

$$(3) \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p+1}(1 - C_{4p+1}^2 + C_{4p+1}^4 - \ldots + C_{4p+1}^{4p})$$

$$(4) \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4p+1}(C_{4p+1}^1 - C_{4p+1}^3 + \ldots + C_{4p+1}^{4p+1})$$

Comparând relațiile (3) și (4) deducem:

$$1 + \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k C_{4p+1}^{2k} = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k+1} C_{4p+1}^{2k-1}$$

3°. Facem în relația (2) $m = 4p+2$, $a = \frac{\pi}{4}$ și avem:

$$0 = \frac{1}{2^{2p+1}}(1 - C_{4p+2}^2 + C_{4p+2}^4 - \ldots - C_{4p+2}^{4p+2}),$$

sau:

$$1 + \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k C_{4p+2}^{2k} = 0.$$

4°. Facem în formulele (2) și (1) $m = 4p+3$, $a = \frac{\pi}{4}$ și avem:

$$\mp\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{2p+1}\sqrt{2}}(1 - C_{4p+3}^2 - \ldots + C_{4p+3}^{4p+2})$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{2p+1}}(C_{4p+3}^1 - C_{4p+3}^3 + \ldots + C_{4p+3}^{4p+3}).$$

Din compararea acestor relații rezultă:

$$1 - C_{4p+3}^2 + \ldots + C_{4p+3}^{4p+2} = -(C_{4p+3}^1 - C_{4p+3}^3 + \ldots - C_{4p+3}^{4p+3})$$

$$\therefore 1 + \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k C_{4p+3}^{2k} + \sum_{k=1}^{2p+2} (-1)^{k+1} C_{4p+3}^{2k-1} = 0.$$

547. — *Să se arate că în orice triunghiu, expresia:*

$$E = \frac{s^2}{p^4} \sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \sum \frac{4R}{s} h_a \cos^2\frac{A}{2},$$

este constantă.

BALASESCU C.

Din formulele cunoscute:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{s}, \quad h_a = \frac{2s}{a}, \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}.$$

$$abc = 4Rs$$

deducem:

$$(1) \quad \sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \sum \frac{p(p-a)}{s} = \frac{3p^2 - p(a+b+c)}{s} = \frac{p^2}{s}$$

$$(2) \quad \sum \frac{4R}{s} h_a \cos^2\frac{A}{2} = \sum \frac{4R}{s}\frac{2s}{a}\frac{p(p-a)}{bc} = \sum \frac{8Rp^2}{abc} = \frac{2p^2}{s}.$$

In virtutea relațiilor (1) și (2), expresiunea E devine:

$$E = \frac{s^2}{p^4} \cdot \frac{p^2}{s} \cdot \frac{2p^2}{s} = 2.$$

Expresia dată este deci constantă.

Soluții date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin, Beșchea N-lae* (lic. Brașov), *Both Ioan* (Gherla), *Catz Boruh* (lic. Cahul), *Cercel Șt. C-tin* (lic. Târgoviște), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dângă S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Duport George* (București), *Dinu S. Dumitru* (lic. Chișinău), *Dobrescu Ana* (București), *Dordea Nicolae* (lic. Sibiu), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Faibovici I. Henri* (lic. Craiova), *Fajon Albert* (lic. Lazăr, București), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Frumușelu H. Gh.* (Alexandria), *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galați), *Oheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gradin I. Alexandru* (lic. Câmpina), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Gurău Gh. Alenerindo* (lic. Galați), *Iacob Șt. Eugen* (Botoșani), *Ianculescu Octavian* (Șc. Milit. de Pilotaj și Antrenament) *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu M. Haralambie* (lic. Pitești), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Morțun Emil* (București), *Master H. D-tru* (Semin. Pedag. București), *Nestor G. D.* (lic. Cantemir, București), *Novacu*

Valeriu (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu C. Corneliu* (Târgovişte), *Rădulescu C. M.* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Segărceanu D. C.* (Craiova), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara). *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sava, Bucureşti), *Zagoican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

552. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^6 - 2x^4\sqrt{x} + 2x^3 - x\sqrt{x} = a.$$

TEODOR V. DIACONESCU.

Ecuaţia dată se poate scri:

$$(x^3 - x\sqrt{x})^2 + (x^3 - x\sqrt{x}) - a = 0,$$

o ecuaţie de gradul al 2-lea în $x^3 - x\sqrt{x}$, rezultă deci:

$$x^3 - x\sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2},$$

sau:

$$(x\sqrt{x})^2 - x\sqrt{x} - \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} = 0.$$

De unde deducem:

$$(1) \qquad x\sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2 \pm 2\sqrt{1+4a}}}{2} = A.$$

Ridicând la patrat avem:

$$x^3 - A^2 = 0 \quad \therefore \quad (x - \sqrt[3]{A^2})(x^2 + \sqrt[3]{A^2}x + \sqrt[3]{A^2}).$$

De aci deducem:

$$x = \sqrt[3]{A^2} \quad \text{şi} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A^2},$$

unde A are valoarea din egalitatea (1).

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Cocorandu Dan* (Şc. Milit. de Geniu), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit. Iaşi). *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Iacob Eugen* (Botoşani), *Ianculescu Octavian* (Şc. Milit. de Pilotaj şi Antrenament), *Manolescu I. Nicolae* (student, Focşani), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavelescu Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Vasiliev Ilie* (Tulcea) şi *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa).

Observare. 1. D-l *Panţu I. Z.* (lic. Lazăr, Bucureşti), a considerat ecuaţia mai generală:

$$x^{2(2m+1)} - 2x^{3m+1}\sqrt{x} + 2x^{2m+1} - x^m - \sqrt{x} = a.$$

2°. D-l *Vasiliev Ilie* (Tulcea) a considerat ecuaţia mai generală:

$$x^{6n} - 2x^{4n}\sqrt{x^n} + 2x^{3n} - x^n\sqrt{x^n} = a.$$

554. — *Să se calculeze suma seriei:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 48n + 7}.$$

CORNELIU N. POPESCU.

Descompunem în fracţii simple termenul general, avem:

$$(1) \qquad \frac{1}{36n^2 + 48n + 7} = \frac{1}{(6n+1)(6n+7)} = \frac{A}{6n+1} + \frac{B}{6n+7},$$

unde A şi B trebuesc determinaţi. Multiplicând relaţia (1) cu $6n+1$ şi în urmă făcând $n = -\frac{1}{6}$, găsim:

$$A = \frac{1}{6}.$$

Multiplicând relaţia (1) cu $6n+7$ şi în urmă luând $n = -\frac{7}{6}$, găsim:

$$B = -\frac{1}{6},$$

Rezultă atunci, că putem scri succesiv:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{36n^2+48n+7} = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6n+7}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6n+7} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6n+7}\right) = \frac{1}{6}.$$

Soluţii date de d-nii: *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C. Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Cocorandu Dan* (Şc. milit. de Geniu), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dordea Nicolae* (lic. Sibiu), *Drăgan G.* (Braşov), *Drâmbă N. C-tin* (lic. Galaţi), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina-Olt), *Duport Gheorghe* (Bucureşti), *Faibovici I. Henri* (Craiova), *Fajon Albert* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Frumuşelu Gh.* (Alexandria) *Frumuzache C-tin* (lic Cluj), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Ca-

racal), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iacob Șt. Eugen* (Botoșani), *Ianculescu Octavian* (Șc. milit. de Pilotaj și antrenament), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscu Coriolan* (lic. Cluj), *Manolescu I. Nicolae* (student, Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic Lazăr, București), *Podariu Al.* (lic. Peatra-Neamt), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Rădulescu C, Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Segărceanu D. C.* (Craiova), *Silistrărianu C.* (Ploești), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Stoica N. Aureliu* (București), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (student, București), *Vasiliev Ilie* (Tulcea) *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara), *Vladimirschi V.* (Tighina) și *Zăgaican Ilie* (Șc. de Conductori Chișinău).

Au generalizat problema procedând ca mai sus, d-nii: *Ianculescu Octavian* (Șc. de Pilotaj și Antrenament), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Stoica N. Aureliu* (București) și *Vasiliev Ilie* (Tulcea) care au găsit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2 n^2 + a(a+2b)n + b(a+b)} = \frac{1}{ab}.$$

555. — *Să se stabilească identitatea:*

$$10 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(2i+1)t - 5 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(4k+2i+1)t + \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(8k+2i+1)t = 16 \frac{\sin^6 2kt}{\sin t}.$$

V. ALACI

Dacă în formula cunoscută care însumează sinusurile arcelor în progresie aritmetică, anume:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \sin(\alpha+2h) + \ldots + \sin[\alpha+(n-1)h] = \frac{\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

luăm succesiv:

$$\alpha = t \quad h = 2t, \quad n = 2k$$

$$\alpha = (4k+1)t, \quad h = 2t, \quad n = 2k$$

$$\alpha = (8k+1)t, \quad h = 2t, \quad n = 2k,$$

găsim:

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \sin(2i+1)t = \frac{\sin 2kt \sin 2kt}{\sin t} = \frac{\sin^2 2kt}{\sin t}$$

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \sin(4k+2i+1)t = \frac{\sin 6kt \sin 2kt}{\sin t}$$

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \sin(8k+2i+1)t = \frac{\sin 10kt \sin 2kt}{\sin t}$$

Din aceste relații deducem ușor, privind primul membru al identității date:

$$(1)\quad 10 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(2i+1)t - 5 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin 4k+2i+1)t + \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(8k+2i+1)t = \frac{\sin 2kt(10\sin 2kt - 5\sin 6kt + \sin 10kt)}{\sin t}$$

Cu ajutorul formulei lui *Moivre*, avem însă:

$$\sin 6kt = 3\sin 2kt - 4\sin^3 2kt,$$

$$\sin 10kt = 16\sin^5 2kt - 20\sin^3 2kt + 5\sin 2kt,$$

astfel că:

$$10\sin 2kt - 5\sin 6kt + \sin 10kt =$$

$$10\sin 2kt - 15\sin 2kt + 20\sin^3 2t +$$

$$16\sin^5 2kt - 20\sin^3 2kt + 5\sin 2kt = 16\sin^5 2kt,$$

și atunci (1) devine:

$$10 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(2i+1)t - 5 \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(4k+2i+1)t + \sum_{i=0}^{2k-1} \sin(8k+2i+1)t = 16 \frac{\sin^6 2kt}{\sin t}.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Bolgard), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit., Timișoara), *Dordea Nicolae* ()ic. Sibiu), *Dumitrescu I. Eugeniu* (lic. Sinaia), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina-Olt). *Florea V. Gheorghe* (Craiova), *Georgescu S. Gh.* (lic. Galați), *Ghrorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ianculescu Octavian* (Șc. de Pilotaj și Antrenament), *Manolescu I. Nicolae* (student, Focșani), *Morțun Emil* (București), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., Iași), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pontazi M. Alexandru* (lic. Galați), *Pantu I. Z.* (lic. Lazăr, București), *Poduriu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iași), *Simlonov Kindin* (lic. Tulcea), *Tanovici V. C-tin* (Șc, Pollt., Timișoara *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București).

Vasilescu Bartolomeu (student, Bucnreşti), *Vaziliu Gh. Gheorghe* (Timişoara), *Vladimirski V.* (Tighina), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi) şi *Zoican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău).

Observare D-l *Panţu I. Z.* a stabilit în acelaş mod ca mai sus, următoarea identitate mai generală:

$$C_{2m+2}^{m+1}\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t - C_{2m+2}^{m+2}\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t$$

$$+\ldots+(-1)^m\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4mk+2i+2m+1)t = 4^m\frac{\sin^{2(m+1)}2kt}{\sin t}.$$

PROBLEME PROPUSE

579. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abccba$, în care a, b, c reprezintă câte o cifră.

POPESCU D. STELIAN.

580. — Un ceasornic are trei ace, care ne dau respectiv numărul orelor, minutelor şi secundelor; ele arată ora unu.

Peste cât timp unul din ace va fi bisectoarea unghiului format de celelalte două.

BESCHEA NICOLAE

581. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ 5x^2+2xy+3y^2=21. \end{cases}$$

VIRLGILIU C. POPESCU.

582. — Să se verifice formula:

$$C_m^{n-1}C_p^1+2C_m^{n-2}C_p^2+3C_m^{n-3}C_p^3+\ldots$$

$$\ldots+iC_m^{n-i}C_p^i+\ldots+nC_m^0C_p^n=\frac{np}{m+p}C_{m+p}^n.$$

STEFAN MUSTA.

583*. — Se proectează o şosea largă de 12 m., nclusiv şanţurile, al cărei ax trebuie să taie ogorul unui locuitor. Conturul ogorului este un patrulater oarecare $ABCD$. Axul şoselei taie laturile AB şi AD în punctele M şi N cuprinse între A şi B şi între A şi D. Se cere să se deplaseze latura AD paralel cu ea, aşa fel ca locuitorul să fie complect despăgubit de suprafaţa ce va ocupa şoseaua. Să se discute toate cazurile de figură. Terenul este presupus plan.

Aplicaţie pentru cazul când patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghiu cu laturile 288 m. şi 67,65 m., axul şoselei face 26° cu latura AB şi taie într'un punct aşezat la 28 m. de B.

COL. GH. BUICLIU

584*. — Se dă poligonul regulat $ABC\ldots KL$, înscris într'un cerc O.

1°. Să se demonstreze că centrele cercurilor înscrise triunghiurilor AOB, $BOC,\ldots KOL$, LOA sunt vârfurile unui poligon regulat.

2°. Să se calculeze suprafaţa acestui poligon, cunoscând latura poligonului dat.

V. ALACI

585*. — Să se verifice inegalitatea:

$$\frac{\cos x\cos^2\frac{x}{2}+\sin x\sin^2\frac{x}{2}-\cos x}{4\sin\frac{x}{2}\cos x-2\sin\frac{x}{2}-2\cos x+1}>0,$$

şi să se scrie forma generală a arcelor care o satisfac.

ION PROTOPOPESCU

586. — Să se stabilească identităţile:

$$\cos^m\alpha=\frac{1}{2^m}\sec m\alpha\left[1+C_m^1\cos 2\alpha+C_m^2\cos 4\alpha+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+C_m^{m-1}\cos 2(m-1)\alpha+\cos 2m\alpha\right]=$$

$$\frac{1}{2^m}\operatorname{cosec} m\alpha\left[C_m^1\sin 2\alpha+C_m^2\sin 4\alpha+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+C_m^{m-1}\sin 2(m-1)\alpha+\sin 2m\alpha\right].$$

ALFRED A. WINKER.

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

——

A apărut *„Culegere de probleme de Algebră“* de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

——

A apărut, *Curs de rezistența materialelor*, de d-l *Constantin C. Teodorescu*, Inginer-Șef, profesor la Școala Politechnică din *Timișoara*. Acest curs cuprinde lecțiunile făcute de autor, cu studenții anului II și III ai Școalei Politechnice din *Timișoara*.

Tipărit într'o formă foarte îngrijită și clară, cu numeroase figuri ireproșabil construite, cartea este menită a fi de un real folos studenților noștri technici și tuturor acelor ce vor să aibă un tratat clar, concis și complect de *rezistența materialelor*.

——

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

——

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 NOEMBRIE 1926 NO. 9.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GR. C. MOISIL. CATEVA INSUMARI ALGEBRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 17.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 466, 497, 520, 545.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Piața Doja 12, Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

CATEVA INSUMARI ALGEBRICE

de GR. C. MOISIL

1. In „R. M. T.“, anul I, No. 2, pag. 13, s'a propus spre însumare seria:

$$1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\dots$$

(rezolvată în R. M. T., anul I, No. 3, pag. 58).

In aceiași revistă, d-l *Ciorănescu* a propus (R. M. T., anul II):

$$1-\frac{3}{a}+\frac{6}{a^2}-\frac{10}{a^3}+\dots$$

In *Gazeta Matematică*, (vol. pag.), tot d-l *Ciorănescu* a propus seria:

$$1+\frac{4}{a}+\frac{9}{a^2}+\frac{16}{a^3}+\dots$$

In acest articol îmi propun să generalizez primele două serii, căutând să determin termenii seriei care e puterea a $p-a$ a unei progresii geometrice și să dau o metodă pentru calculul seriilor de forma:

$$\sum^{\infty}\frac{n^p}{a^{n-1}} \qquad (p \text{ întreg, pozitiv}).$$

2. Să considerăm seria:

$$(1)\quad S_p=1\pm\frac{k_{p,1}}{a}+\frac{k_{p,2}}{a^2}\pm\frac{k_{p,3}}{a^3}+\dots \qquad (a>1),$$

și să ne propunem a determina coeficienții k, așa fel ca seria S_p să fie puterea a $p-a$ a progresiei geometrice descrescătoare:

$$S_1=1\pm\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\pm\frac{1}{a^3}+\dots$$

$$S_p=S_1^p.$$

Vom proceda prin recurență.

Să presupunem forma (1) valabilă pentru $p=n$ și să arătăm că ea va fi valabilă pentru $p=n+1$.

Vom considera:

$$S_n=1\pm\frac{k_{n,1}}{a}+\frac{k_{n,2}}{a^2}\pm\dots$$

$$S_{n+1}=\left(1\pm\frac{k_{n,1}}{a}+\frac{k_{n,2}}{a^2}\pm\dots\right)\left(1\pm\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\pm\dots\right)$$

$$S_{n+1}=1\pm\frac{1+k_{n,1}}{a}+\frac{1+k_{n,1}+k_{n,2}}{a^2}\pm\dots$$

sau însemnând:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 1+k_{n,1}&=k_{n+1,1}\\ 1+k_{n,1}+k_{n,2}&=k_{n+1,2}\\ &\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\\ 1+k_{n,1}+\dots+k_{n,i}&=k_{n+1,i}. \end{aligned}$$

Vom putea scrie:

$$S_{n+1}=1\pm\frac{k_{n+1,1}}{a}+\frac{k_{n+1,2}}{a^2}\pm\dots$$

formulă care ne arată că forma (1) e forma seriilor ce sunt puterea a $p-a$ a progresiei geometrice descrescătoare.

Relațiile (2) însă ne permit să și scrim forma termenilor seriei S_p dacă îi cunoaștem pe cei ai seriei S_{p-1}.

Astfel calculând din aproape în aproape căpătăm:

$$S_2=1\pm\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}\pm\frac{4}{a^3}+\dots=\left[\frac{a}{a+1}\right]^2$$

(R. M. T., I, pr. 13).

$$S_3=1\pm\frac{3}{a}+\frac{6}{a^2}\pm\frac{10}{a^3}+\dots=\left[\frac{a}{a+1}\right]^3$$

(R. M. T., II. pr.).

Această problemă se poate rezolva și direct, așa că ea rămâne încă nerezolvată:

$$S_4 = 1 \pm \frac{4}{a} + \frac{10}{a^2} \pm \frac{20}{a^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{P_n}{a^{n-1}} + \ldots = \left[\frac{a}{a \mp 1}\right]^4$$

unde P_n e al n-lea număr figurat.

3. Pentru calculul coeficienților k ne vom servi de relațiile (2) și anume:

$$k_{1,\,i} = 1$$

$$k_{2,\,i} = i + 1$$

și:

$$k_{p,\,i} = 1 + k_{p-1,\,1} + k_{p-1,\,2} + \ldots + k_{p-1,\,i},$$

dacă am așeza coeficienții k într'un tablou triunghiular, asemeni triunghiului lui *Pascal*, am obține, conform relațiilor de mai sus chiar triunghiul lui *Pascal*. Identificând:

$$(3) \qquad k_{1,\,i} = 1 = C_i^0$$

$$k_{2,\,i-1} = C_i^1$$

$$k_{3,\,i-2} = C_i^2$$

. . . . .

. . . . .

$$k_{p,\,i-p+1} = C_i^{p-1}.$$

Ultima formulă, pusă sub o formă mai comodă:

$$(4) \qquad k_{p,\,j} = C_{p+j-1}^{p-1}$$

e rezultatul interesant la care voiam să ajung. Așa că relația (1) o putem scrie:

$$(5) \quad S_p = 1 \pm \frac{C_p^{p-1}}{a} + \frac{C_{p+1}^{p-1}}{a^2} \pm \frac{C_{p+2}^{p-1}}{a^3} + \ldots$$

$$\ldots = \left[\frac{a}{a \mp 1}\right]^p \qquad (a > 1).$$

Simbolul C_j^i reprezintă combinări de j obiecte luate câte i.

4. Formula (5), interesantă prin ea însăși, e importantă căci ea ne permite să calculăm suma unor serii interesante, dintre care cea mai simplă a fost propusă de d. *Ciorănescu*.

In „G. M". avem.

Fie seria:

$$1 + \frac{4}{a} + \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^3} + \ldots$$

Să considerăm identitatea:

$$\frac{n(n+1)}{2a^{n-1}} = \frac{n^2}{2a^{n-1}} + \frac{n}{2a^{n-1}}$$

sau întrebuințând notația T_j, pentru al 10 număr triunghiular:

$$\frac{T_n}{a^{n-1}} = \frac{n^2}{2a^{n-1}} + \frac{n}{2a^{n-1}}$$

$$\frac{n^2}{a^{n-1}} = 2\frac{T_n}{a^{n-1}} - \frac{n}{a^{n-1}}$$

și însumând termenii egali:

$$(6) \qquad \sum_1^\infty \frac{n^2}{a^{n-2}} = 2\sum_1^\infty \frac{T_n}{a^{n-1}} - \sum_1^\infty \frac{n}{a^{n-1}},$$

servindu-ne de relațiile dela § 2, avem:

$$(7) \qquad \sum \frac{n^2}{a^{n-1}} = 2\left(\frac{a}{a-1}\right)^3 - \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \left(\frac{a+1}{a-1}\right).$$

Asemeni, aplicând ca mai sus formula:

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

ca mai sus, obținem:

$$(8) \quad \sum^\infty \frac{P_n}{a^{n-1}} = \frac{1}{6}\sum \frac{n^3}{a^{n-1}} + \frac{1}{2}\sum \frac{n^2}{a^{n-1}} + \frac{1}{3}\sum \frac{n}{a^{n-1}}$$

și conform însumărilor § 2:

$$\sum^\infty \frac{n^3}{a^{n-1}} = \left[\frac{a}{a-1}\right]^2 \left[6\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{a-1}\right) - 2\right]$$

$$(9) \qquad \sum^\infty \frac{n^3}{a^{n-1}} = \frac{a^2(a^2+7a-2)}{(a-1)^4}.$$

5. Generalizarea acestei chestiuni e mai dificilă și nu conduce la o formulă generală de însumare a seriei:

$$(10) \qquad \sigma_p = \sum^\infty \frac{a^p}{n^{n-1}} \qquad (p \text{ întreg, pozitiv})$$

ci numai la un metod general de calculare a acestei sume, metod ce impune prealabil calculul unor coeficienți speciali. Intr'adevăr vom avea nevoe să calculăm coeficienții desvoltării:

$$(11)\quad n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)= n^p + k_p^1 n^{p-1} + k_p^2 n^{p-2} + \ldots$$

Pentru calculul acestor coeficienți ne vom servi de acelaș metod „prin recurență":

$$n(n+1)\ldots(n+p-1) = n^p + k_p^1 n^{p-1} + \ldots$$

$$n(n+1)..(n+p-1)(n+p) = (n^p k + k_p^1 n^{p-1} + \ldots)(n+p)$$

$$n(n+1)\ldots(n+p) = n^{p+1} + (p + k_p^1) n^p + (p k_p^1 + k_p^2) n^{p-1} + \ldots$$

dar:

$$n(n+1)..(n+p) = n^{p+1} + k_{p+1}^1 n^p + k_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots$$

și identificând:

$$(12)\qquad \begin{aligned} k_{p+1}^1 &= p + k_p^1 \\ k_{p+1}^2 &= p\,k_p^2 + k_p^2 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ k_{p+1}^i &= p\,k_p^{i-1} + k_p^i. \end{aligned}$$

Aceste relații ne permit calculul coeficienților k fără să ne dea totuși o formă generală a acestor coeficienți. Așa că vom presupune coeficienții calculați.

6. Să considerăm din nou relația (11):

$$\therefore\ n(n+1)\ldots(n+p-1) = n^p + k_p^1 n^{p-1} + k_p^2 n^{p-2} + \ldots$$

$$\therefore\ \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}\cdot\frac{1}{a^n} = \frac{1}{p!}n^p + \frac{k_p^1}{p!}n^{p-1} + \frac{k_p^2}{p!}n^{p-2} + \ldots$$

$$\therefore\ S_p = \frac{\sigma_p}{p!} + K_p^1\frac{\sigma_{p-1}}{p!} + K_p^2\frac{\sigma_{p-2}}{p!} + \ldots$$

$$(13)\qquad \sigma_p = p!\,S_p - k_p^1\sigma_{p-1} - k_p^2\sigma_{p-2} - \ldots$$

Această ultimă formulă ne arată pe de o parte relațiile între seriile S_p și σ_p, pe de alta ne permite calculul sumelor σ_p.

NOTE MATEMATICE

17. *Desvoltarea unui determinant.* Fie sistemul de n ecuații cu n necunoscute:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \ldots + a^{n-1} x_n + a^n = 0 \\ X_1 + b x_2 + b^2 x_3 + \ldots + b^{n-1} x_n + b^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 + l x_2 + l^2 x_3 + \ldots + l^{n-1} x_n + l^n = 0 \end{cases}$$

Pentru a-l rezolva, să considerăm polinomul în α

$$(2)\quad f(\alpha) = \alpha^n + \alpha^{n-1} x_n + \ldots + \alpha x_2 + x_1$$

unde $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt necunoscutele sistemului (1).

Inlocuind în $f(\alpha)$ pe α prin $a, b, \ldots l$, se obțin succesiv ecuațiile sistemului propus, ceiace ne arată că $f(\alpha)$ se anulează la fiecare înlocuire. Deci $f(\alpha)$ este divizibil prin produsul:

$$(3)\quad (\alpha - a)(\alpha - b)\ldots(\alpha - l) \text{ de gradul } n.$$

Cum $f(\alpha)$ e de gradul n, ca și produsul (3), și cnm coeficienții termenilor de gradul n din (2) și (3) sunt aceiași, și anume egali cu 1_1 rezultă că:

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b)\ldots(\alpha - l)$$

sau:

$$(4)\quad f(\alpha) = \alpha^n - S_1\alpha^{n-1} + S_2\alpha^{n-2} - S_3\alpha^{n-3} + \ldots \ldots + (-1)^n S_n \alpha^0,$$

unde S_k reprezintă suma produselor câte k, în toate modurile posibile, a cătimilor $a, b, \ldots l$ luate fiecare *numai* la gradul 1.

Din identificarea polinoamelor din (2) și (4), scoatem valorile necunoscutelor:

$$\begin{aligned} X_n &= -S_1 \\ X_{n-1} &= S_2 \\ X_{n-2} &= -S_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ X_k &= (-1)^{n-k+1} S_{n-k+1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_1 &= (-1)^n S_n. \end{aligned}$$

Sistemul propus se poate rezolva şi cu ajutorul determinanţilor.

Intr'adevăr, după regula lui *Crammer:*

$$X_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{n-1}}$$

unde:

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \dots a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 \dots b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 \dots c^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 1 & l & l^2 \dots l^{n-1} \end{vmatrix}$$ de ordinul n şi de gradul $\frac{n(n-1)}{2}$

iar:

$$\Delta_k = -\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \dots a^{k-2} & a^n & a^k \dots a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 \dots b^{k-2} & b^n & b^k \dots b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 \dots c^{k-2} & c^n & c^k \dots c^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 1 & l & l^2 \dots l^{k-2} & l^n & l^k \dots l^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-k+1} \begin{vmatrix} 1 & a \dots a^{k-2} & a^k \dots a^n \\ 1 & b \dots b^{k-2} & b^k \dots b^n \\ 1 & c \dots c^{k-2} & c^k \dots c^n \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 1 & l \dots l^{k-2} & l^k \dots l^n \end{vmatrix}$$

Deci:

$$X_k = \frac{(-1)^{n-k+1}}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & a \dots a^{k-2} & a^k \dots a^n \\ 1 & b \dots b^{k-2} & b^k \dots b^n \\ 1 & c \dots c^{k-2} & c^k \dots c^n \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 1 & l \dots l_{k-2} & l^k \dots l^n \end{vmatrix}$$

Insă am văzut mai 'nainte că:

$$X_k = (-1)^{n-k+1} S_{n-k+1}.$$

Egalând aceste 2 valori ale lui X_k, se obţine:

$$\Delta'_k = \begin{vmatrix} 1 & a \dots a^{k-2} & a^k \dots a^n \\ 1 & b \dots b^{k-2} & b^k \dots b^n \\ 1 & c \dots c^{k-2} & c^k \dots c^n \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 1 & l \dots l^{k-2} & l^k \dots l^n \end{vmatrix} = S_{n-(k-1)} \Delta_{n-1}.$$

Deci:

Un determinant *Vandermonde* de ordinul n şi căruia îi lipseşte coloane în care literile sunt ridicate la puterea $k-1$ este egal cu produsul unui determinant *Vandermonde* de ordinul n prin $S_{n-(k-1)}$.

Aplicaţii. 1°). Desvoltând un determinant *Vandermonde* de ordinul $n+1$, după elementele coloanei 1^a, adică a coloanei literei a, se deduce:

$$\Delta_n^{a,\,b,\dots l} = b\,c \dots l\,\Delta_{n-1}^{b,\,c\dots l} - a\,\Delta_{n-1}^{b,\,c\dots l} S_{n-1} + a^2\,\Delta_{n-1}^{b,\,c\dots l} S_{n-2} + \dots + (-1)^n\,\Delta_{n-1}^{b,\,c,\dots l}\,S_0\,a^n.$$

sau:

$$(b-a)(c-a)(l-a) = b\,c \dots l + \sum_{q=1}^{n} (-1)^q\,a^q\,S_{n-q}^{b,\,c,\dots l}.$$

Desvoltând acelaş determinant după elementele liniei 1^a, avem:

$$\Delta_n^{a,\,b,\dots l} = b\,c \dots l\,\Delta_{n-1}^{b,\,c,\dots l} - a\,c \dots l\,\Delta_{n-1}^{a,\,c,\dots l} + a\,b\,d \dots l\,\Delta_{n-1}^{a,\,b,\,d,\,l} - \dots$$

2°). Adunând ecuaţiile sistemului (1) şi înlocuind necunoscutele prin valorile lor obţinem:

$$(5)\quad \Sigma a^n = S_1 \Sigma a^{n-1} - S_2 \Sigma a^{n-2} \dots (-1)^{n+1} \Sigma a^{n-n}.$$

De aci putem afla suma puterilor a n^a a n numere oarecari, cunoscând $S_1, S_2, \dots S_n$ şi sumele tuturor puterilor asemenea ale acelor cătimi, inferioare lui n.

Ţinând seama de (5) se poate enunţa proprietatea $a, b, \dots l$ *fiind rădăcinele ecuaţiei:*

$$X^n + \alpha_1 X^{n-1} \dots + \alpha_{n-1} X + \alpha_n = 0$$

avem relaţia:

$$\Sigma a^n = -\sum_{q=1}^{n} \alpha_q \left[a^{n-q} + b^{n-q} + \dots + l^{n-q}\right].$$

L. WEISS
Galaţi.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICA DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I

Geometrie

11 Octombrie 1926

Chestiunea I. Se dă triunghiul B A C dreptunghic în A. Fie I centrul cercului înscris în acest triunghiu; M şi N punctele de contact ale cercului I respectiv cu laturile A C şi A B. Dreapta M N se întâlneşte într'un punct K cu tangenta în A la cercul B A C. Să se demonstreze că I K şi B C sunt paralele şi să se deducă relaţiunea:

$$K Q - K L = K P$$

în care Q, L, P sunt proecţiile lui K respectiv pe A C, A B şi B C.

Chestiunea II. Se dau două drepte paralele X X' şi Y Y'. Fie A B perpendiculara lor comună. Se ia un punct P variabil pe X X' şi un punct Q variabil pe Y Y'. Punctele P şi Q sunt situate de o parte şi de alta a dreptei A B. Ştiind că lungimile A P şi B Q sunt legate prin relaţia:

$$A P . B Q = \overline{AB}^2$$

şi că cercul de diametru P Q întâlneşte pe A B în F şi F', se cere să se demonstreze:

1°. Că punctele F şi F' rămân fixe când dreapta P Q variază. Pentru aceasta, se va arăta mai întâi că:

$$A F . A F' = B F . B F'.$$

2°. Că produsul distanţelor lui F şi F' la P Q este constant şi egal cu $\overline{AB}^2$.

3°. Că dacă I şi I' sunt proecţiile lui F şi F' pe P Q, atunci patrulaterul A I B I' este inscriptibil.

(Timp acordat 4 ore).

Algebră

I

Să se studieze variaţiunea funcţiunei:

$$y = \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{7}{2} L(x^2 + 4) + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}$$

şi să se figureze curba reprezentativă.

II

Să se determine a astfel ca ecuaţia:

$$3x^4 - a x^3 + 4 x^2 - 3x + 1 = 0,$$

să aibă două rădăcini egale şi de semne contrare şi în acest caz să se rezole ecuaţia dată.

Lucrare scrisă de Trigonometrie

12 Octombrie 1926

Chestiunea I.

Ştiind că:

$$\sin 216^0 = \sin 576^0 = \sin 684^0 = \sin 1944^0 = -\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

să se calculeze cu trei zecimale exacte:

$x = \sin 108^0$; $y = \sin 288^0$; $z = \sin 342^0$; $w = \sin 522^0$.

Chestiunea II.

Să se dea expresia generală a tuturor arcelor pentru care expresia:

$$E = \frac{2\left(\sin x \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\right)\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2 x - 1}$$

este pozitivă.

Chestiunea III.

Să se transforme expresia:

$$E = (4\cos^2 a - 1)\sin a$$

intr'o expresie calculabilă prin logaritmi.

BIBLIOGRAFIE

1, *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. Octombrie 1926. Asupra unui sistem de ecuaţii, de *N. Kaufmann*. Integrala logaritmică a unei funcţiuni, de *Nicolae Ciorănescu*.

2. *Foaia Matematică*, anul III, No. 10, Octombrie 1926. Asupra unor puncte colineare, de *N. G. Botea*.

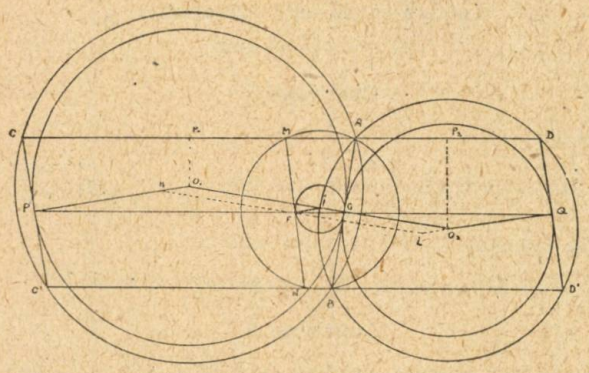
3. *Curierul Matematic*, vol. II, No. 9, Noembrie 1926. Asupra unor determinanţi şi ecuaţiile lor caracteristice, de *Tib. Popovici*. Asupra unei dezvoltări, de *Sublocot. M. Focşeneanu*.

PROBLEME REZOLVATE

466, — *Se dau două cercuri. Prin punctele lor de intersecţie se duce două secante paralele, care formează un paralelogram cu vârfurile pe cele două cercuri.*

Se cere locul geometric al mijloacelor laturilor acestui paralelogram şi al punctului de intersecţie al diagonalelor lui. când secantele rămânând paralele, trec necontenit prin punctele de intersecţie al cercurilor date.

GH CONSTANTINESCU



Soluțiune dată de d-l *Alfred A. Winkler* (Semin. pedag., Iași).

Insemnăm cu O_1 și O_2 centrele celor două cercuri date, cu R_1 și R_2 razele lor cu AB coarda lor comună. Fie CD secanta ce trece prin A și C'D' paralela ei ce trece prin B. Fie M mijlocul secantei CD, N acel al secantei C'D'. Fie P și Q mijloacele coardelor CC' și DD'.

Insemnăm cu I mijlocul lui $O_1 O_2$.

Locul punctelor P *și* Q. Figura CDC'D' fiind un paralelogram rezultă egalitatea arcelor:

$$\overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{AB} \quad \text{în cercul } O_1$$

și

$$\overset{\frown}{DD'} = \overset{\frown}{AB} \quad \text{în cercul } O_2$$

deci egalitatea între coarde:

$$CC' = DD' = AB = C^{te}.$$

Coardele CC' și DD' fiind coarde de lungime constantă în cele două cercuri O_1 și O_2 rezultă că depărtările lor O_1P și O_2Q vor fi constante deci P și Q descriu fiecare câte un cerc cu centrele respectiv în O_1 și O_2 și de raze:

$$\sqrt{R_1^2 - l^2} \quad \text{și} \quad \sqrt{R_2^2 - l^2}$$

însemnând cu $2l$ coarda comună AB. Evident, cele două cercuri sunt tangente ambele în același punct H unde coarda AB intersectează linia centrelor O_1O_2.

Locul punctelor M *și* N. Ducem O_1P_1 și O_2P_2 P_2 perpendiculare la CD. Unim M cu O_1 și O_2. In triunghiul O_1MO_2, MI fiind mediană avem:

$$(1) \qquad \overline{MI}^2 = \frac{\overline{MO_1}^2 + \overline{MO_2}^2}{2} - \frac{\overline{O_1O_2}^2}{4}.$$

Din triunghiurile dreptunghice O_1P_1M și O_2P_2M deducem:

$$(2) \quad \overline{MO_1}^2 = \overline{O_1P_1}^2 + \overline{P_1M}^2 \text{ și } \overline{MO_2}^2 = \overline{O_2P_2}^2 + \overline{P_2M}^2.$$

Dar:

$$\overline{P_1M} = \overline{CM} - \overline{CP_1} = \frac{\overline{CD}}{2} - \frac{\overline{CA}}{2} =$$

$$\frac{\overline{CA} + \overline{AD}}{2} - \frac{\overline{CA}}{2} = \frac{\overline{AD}}{2} = \overline{P_2A}$$

deci $$\overline{P_1M} = \overline{P_2A}.$$

Analog se deduce:

$$\overline{P_2M} = \overline{P_1A}.$$

Din triunghiurile dreptunghice O_1P_1A și O_2P_2A deducem:

$$\overline{O_1P_1}^2 = \overline{O_1A}^2 - \overline{P_1A}^2 \text{ și } \overline{O_2P_2}^2 = \overline{O_2A}^2 - \overline{P_2A}^2$$

iar relația (1) devine:

$$\overline{MI}^2 = \frac{\overline{O_1A}^2 + \overline{O_2A}^2}{2} - \frac{\overline{O_1O_2}^2}{4}$$

sau:

$$\overline{MI}^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} - \frac{\overline{O_1O_2}^2}{4} \quad \text{adică} \quad \overline{MI} = C^{te}.$$

Deci locul geometric al punctului M este un cerc cu centrul în I și cu raza:

$$MI = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2} - \frac{\overline{O_1O_2}^2}{4}}.$$

La fel se poate dovedi că locul lui N mijlocul coardei C'D' este același cere.

Demonstrația subsistă și în cazul când secanta trece de poziția tangentei în A la unul din cercuri cu condiția că în acest caz secanta:

$$CD = AC - AD.$$

Locul punctului F *de intersecție al diagonalelor.* Unind punctele P și Q mijloacele coardelor CC' și DD', dreapta PQ va fi paralelă cu secantele CD și C'D' și va trece, după cum se știe și prin F. Dar dreapta PQ trecând prin mijlocul P al laturei CC' din trapezul ABCC' și fiind paralelă cu bazele trapezului va trece, neapărat, și prin mijlocul laturei AB adică prin H. Ches-

tiunea s'a redus deci la a găsi locul mijlocului secantei a două cercuri tangente, care trece prin punctul lor de tangență și se rotește în jurul acestui punct.

Locul acestui punct va fi ca și a punctului M, un cerc cu centrul în I și cu raza $IF = IH$.

Observație. Locul punctului F se mai putea deduce, observând că locul punctelor M și N fiind un cerc ce trece prin A și B; cum coarda MN, care unește mijloacele a două laturi opuse ale paralelogramului este egală cu CC′ deci cu AB adică este de lungime constantă, rezultă că ea rămâne la distanță constantă de centrul I al cercului, și deci mijlocul ei va descrie un cerc cu centrul în I. Dar mijlocul lui MN este tocmai punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului CDCD′.

Soluțiune dată de d-l *Constantinescu Gh.*

Locul punctului de intersecție F al diagonalelor. Din I mijlocul lui O_1O_2 ducem o dreaptă paralelă cu O_1P deci cu O_2O_1 care taie dreapta PQ în F. Din F ducem o paralelă la O_1IO_2 care taie pe O_1P și O_2Q în K și L. Avem evident:

$$\frac{FK}{FL} = \frac{FP}{FQ} \quad \text{dar} \quad KO_1O_2L$$

fiind un paralelogram, I mijlocul laturei O_1O_2 și IF paralelă cu O_1K urmează că $FK = FL$ deci:

$$\frac{FP}{FQ} = 1 \quad \text{sau} \quad FP = FQ.$$

Adică F este mijlocul lui P'Q, deci tocmai punctul comun diagonalelor patrulaterului CDC′D′.

Pe de altă parte se vede că:

$$IF = O_1K = O_1P - KP = R_1 - LQ$$

sau:

$$IF = R_1 - (LO_2 + O_2Q) = R_1 - R_2 - LO_2$$

dar $LO_2 = IF$ deci:

$$IF = R_1 - R_2 - IF$$

sau:

$$2IF = R_1 - R_2$$

deci $IF = \frac{R_1 - R_2}{2} = C^{te}$ rezultă că locul lui F este un cerc cu centrul în I.

Dreapta IF fiind paralelă cu O_1P care este perpendiculară pe CC′, urmează că O_1P este perpendiculară pe MN paralelă pe coardele CC′ și DD′. Urmează că coarda $MN = AB = 2l$ rămâne la distanța IF constantă de punctul I, urmează că punctele M și N vor descrie un cerc cu centrul în I și cu raza:

$$IM = IN = \sqrt{FM^2 + IF^2}$$

sau: $$IM = IN = \sqrt{l^2 + \left(\frac{R_1 - R_2}{2}\right)^2}.$$

Locul punctelor P și Q ca în soluțiunea precedentă.

Soluțiune geometrică bună dată de d-l *Câlniceanu Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu) și *A. Popovici* (Foșcani).

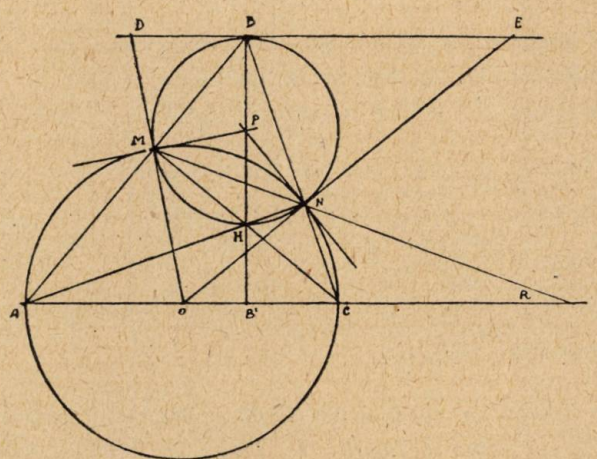
Soluțiune analitică bună dată de d-l *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. V. Alexandri, Galați).

NOTĂ. Atragem cu ocaziunea aceasta din nou atențiunea corespondenților noștri să dea grijea cuvenită redactării problemelor ce trimit spre publicare. Este un lucru ce se repetă la fiecare apariție a numărului revistei noastre și cu toate acestea ea rămâne vorbă goală. Cu ocazia redactării problemelor de geometrie publicate în acest număr, am găsit probleme cari nu erau semnate de cine sunt rezolvate; mai mult, am găsit figuri anexate la o soluțiune care aparțineau altei probleme, sau figuri în care figurau litere care nu se găseau în soluțiune sau viceversa, Aceste neglijențe fac imposibllă urmărirea soluțiunilor, chiar a celor bune, din cauza aceasta multe soluțiuni nu au putut fi menționate.

A. C.

497. — *Fie triunghiul* ABC *și cercul descris pe* AC *ca diametru, care taie laturile* AB *și* BC *în* M *și* N. *Tangentele în* M *și* N *la cerc se întâlnesc pe înălțimea* BB′.

A. NICOLAU



Soluțiunea I. Insemnăm — conform enunțului — cu M și N punctele de intersecție ale cercului de diametru A C cu laturile B A și B C ale triunghiului A B C.

Unghiurile A M C și A N C fiind astfel înscrise într'un semicerc urmează că dreptele A N și C M sunt înălțimele ce corespund laturilor B A și B C.

Fie H ortocentrul triunghiului dat; însemnăm cu P_m și P_n punctele de intersecție ale tangentelor în M și N la cercul dus, cu înălțimea B B' a triunghiului.

Observăm că $\sphericalangle BMP_m = \sphericalangle MCA$ având aceiași măsură dar $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBP_m$ având același compliment $\sphericalangle A$. deci $\sphericalangle BMP_m = \sphericalangle MBP_m$ urmează că triunghiul MP_mB este isoscel și deci:

(1) $$P_m M = P_m B.$$

Analog se poate demonstra că triunghiul NP_nB este isoscel și că deci:

(2) $$P_n N = P_n B.$$

Se observă, pe de altă parte, că $\sphericalangle MHP_m = \sphericalangle A$ având același compliment anume $\sphericalangle MBB'$; iar $\sphericalangle P_m MH = \sphericalangle A$ având aceiași măsură, arcul M N C în cercul de diametru A C.

Deci $\sphericalangle MHP_m = \sphericalangle P_m MH$ de unde rezultă:

(1') $$P_m M = P_m H.$$

Analog, putem demonstra că:

(2') $$P_n N = P_n H.$$

Din egalitățile (1) și (1'), și (2) și (2') deducem:

$$P_m B = P_m H$$

și

$$P_n B = P_n H$$

de unde urmează că punctele P_m și P_n de pe înălțimea B B' trebue să se confunde într'un singur punct P, mijloc al segmentului B H, c. c. t. d.

Soluțiuni analoage date de d-nii: *Atanasiu M. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Bălășescu C. B.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Dumitrescu Eugen* (Buzău), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. I. C. Brătianu, Pitești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Manolescu N. I.* (Focșani), *Negreu Petruș* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu G. Virgiliu* (lic. mil., Tg.-Mureș), *Segal Leon* (lic. Laurian, Botoșani), *Schor A. Oscar* (Sem. Pedag., București), *Teodorescu Nic.* (lic. Spiru Haret, București).

Soluțiunea II. Insemnând cu O mijlocul laturei A C, se știe că cercul lui *Euler* al triunghiului A B C trece prin M, N, B' și O. Pe de altă parte P M și P N fiind tangente la cercul de diametru A C, în punctele M și N rezultă că patrulaterul P M O N este inscriptibil. Acest cerc având trei puncte comune cu cercul lui *Euler*, ele se confundă; rezultă că cercul lui *Euler* trece și prin punctul P. Dar unghiul P M O este drept, rezultă că punctele P și O sunt diametral opuse în cercul lui *Euler*, se mai știe însă că în același cerc diametral opus al punctului O este și mijlocul segmentului B H, deci punctul P de concurență a tangentelor în M și N la cercul de diametru A C se confundă cu mijlocul segmentului B H.

Soluțiune dată de d-nii: *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Bey M. Gh.* (lic. Fr Buzești), Craiova), *Cernes Aur.* (lic. Național, Iași), *Costăchescu V. C.* (lic. Național. Iași), *Dărmănescu Ioan* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Feldstein Solomon* (lic. Brătianu, Pitești), *Ieremia Petru* (lic. Diaconovici, Timișoara), *Ionescu C. Th. Bujor* (lic. Cantemir, București), *Mariș Marius* (lic. Arad). *Nestor Gh. Dumitru* (lic. Cantemir, București), *Niculescu Emanoil* (lic. mil., Craiova), *Nicolau Dobridor* (lic. mil., Craiova), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stan Constantin* (lic. Roman), *Stan I. Aurelian* (lic. mil., Iași).

Soluțiunea III. Unim punctele M și N și prelungim dreapta M N până la întâlnirea ei în punctul R cu latura A C. Se știe că polara lui R în raport cu cercul de diametru A C trece prin intersecția dreptelor A M și C N, adică prin B; precum și prin intersecția dreptelor A N și C M, adică prin H, deci această polară este chiar înălțimea B B' a triunghiului A B C. Presupunând că A C se rotește în jurul lui R până se confundă cu M N, coardele A M și C N devin tangentele în M și N la cerc, de unde rezultă că punctul lor de intersecție P se va găsi și el pe polara lui R. c. c. t. d.

Soluțiune dată de d-nii: *Agapescu Nicolae* (Sem. Pedag. Universitar), *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Băcanu V. Ioan* (lic. Brătianu, Pitești), *Ciocoiu Laurențiu* (lic. Brașov), *Cocea Gh. Theodor* (lic. Brătianu, Pitești), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Grigore Ioan* (lic. Brătianu, Pitești), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iscovici Paul* (lic. Brătianu, Pitești), *Scripcă Laur* (Șc. Polit., București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Diaconovici, Timișoara), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea). *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Brătianu, Pitești).

Soluția IV dată de d-l *Florea M. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova). Ducem prin B parelela la latura A C care taie dreptele O M și O N în D și E. Se observă că triunghiul E B N este isoscel căci $\sphericalangle EBN = \sphericalangle BCA$ ca alterne interne iar

$\sphericalangle ENB = \sphericalangle ONC$ ca opuse la vârf, însă $\sphericalangle ONC = \sphericalangle BCA$ căci triunghiul ONC este isoscel deci $\sphericalangle EBN = \sphericalangle ENB$ de unde rezultă că $EB = EN$.

Analog se dovedește că $DB = DM$ și cum $OM = ON$ rezultă că punctele B, M și N sunt punctele de contact ale cercului înscris triunghiului DOE, urmează că perpendicularele ridicate în aceste puncte sunt concurente într'un punct P situat pe înălțimea triunghiului ABC căci DE s'a dus paralelă cu AC. c. c. t. d

Au mai rezolvat problema, bine, pe cale trigonometrică d-l *Alfred A. Winkler* (Semin. pedag., Iași).

Pe cale analitică d-nii: *Frumușelu Gh.* (lic. I. Meșotă, Brașov), *Grofșoreanu Gh.* (Șc. polit., Pimișoara), *Rusanda Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara).

520. — *In raport cu ax le rectangulare* xOy *se dau punctele* $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, -1)$. *O dreaptă mobilă* OD *în jurul lui* O *taie dreptele* AB *și* AC *respectiv în puuctele* P *și* Q. *Se cere:*

1) Să se găsească și în urmă să se construiască locul geometric al punctului M, *mijlocul segmentului* PO, *când* OD *se rotește în jurul lui* O.

2) Să se determine dreptele OD *pentru cari avem* $MA = OA$, *să se arate că sunt două drepte care îndeplinesc această condițiune; să se determine unghiul lor cu axa* Ox.

AUGUST COMĂN.

Ecuațiile dreptelor AB și AC sunt:

$$(AB) \qquad x + y - 1 = 0$$

$$(AC) \qquad x - y - 1 = 0.$$

Acea a dreptei variabile (OD) $y = \lambda x$ (λ variabil). Coordonatele (x_1, y_1) ale lui P se vor obține rezolvind sistemul:

$$x + y - 1 = 0$$
$$y = \lambda x$$

iar acelea ale lui Q (x_2, y_2) rezolvind sistemul:

$$x - y - 1 = 0$$
$$y = \lambda x$$

deducem:

$$P\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{1+\lambda} \\ y_1 = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \end{cases} \qquad Q\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{1-\lambda} \\ y_2 = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \end{cases}.$$

Coordonatele lui M vor fi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{1}{1+\lambda} + \dfrac{1}{1-\lambda}}{2} = \frac{1}{1-\lambda^2}$$

și: $$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\dfrac{1}{1+\lambda} + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}}{2} = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}$$

Locul geometric al lui M se va obține eliminând pe λ între relațiunile:

$$x = \frac{1}{1-\lambda^2}$$

$$y = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}.$$

Impărțindu-le deducem $\dfrac{y}{x} = \lambda$, substituind această valoare a lui λ în una din relațiunile ce preced obținem:

$$x = \frac{1}{1 - \dfrac{y^2}{x^2}} \text{ sau } x = \frac{x^2}{x^2 - y^2} \therefore x(x^2 - y^2) - x^2 = 0$$

care se descompune în:

$$x = 0$$

și: $$y^2 = x^2 - x$$

Lăsând soluțiunea $x = 0$ la o parte locul punctului M este curba:

$$y = \pm \sqrt{x(x-1)}.$$

Construcția locului geometric. Din ecuațiunea curbei se vede că pentru aceleași valori ale lui x, y are două valori egale dar de semne contrare deci curba admite axa x-lor ca axă de simetrie. Va fi suficient deci să reprezentăm porțiunea din curbă situată deasupra axei Ox, reprezentată de $x = +\sqrt{x^2 - x}$ pentruca prin simetrie să o construim complect. Să mai observă că y nu există decât atunci când:

$$x(x-1) \geqq 0.$$

Inegalitate care nu este verificată decât pentru valorile lui x astfel ca:

$$x < 0 \quad \text{și} \quad x > 1.$$

Vom obține deci porțiunea de curbă situată deasupra lui Ox făcând pe x să varieze între $-\infty$ și O și pe urmă între $+1$ și $+\infty$.

Calculăm derivata funcțiunii:

$$y=\sqrt{x^2-x}$$

deducem:

$$y'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}.$$

Observăm că pentru valoarea pentru cari derivata se anulează $\left(x=\frac{1}{2}\right)$ funcțiunea nu există, deci funcțiunea nu va admite nici maximum nici minimum. Se observă că pentru valorile lui $x<0$ derivata este negativă, iar pentru acele ale lui $x>1$ ea este pozitivă.

Avem deci:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	descrește	0		0	crește	$+\infty$

Putem deci trasa curba deasupra axei Ox și prin simetrie o deducem și pe acea de sub axa Ox.

Pentru a putea trasa curba cu mai multă precisiune, să considerăm punctul I mijlocul lui O (0, 0) și A (1, 0). Să scriem ecuațiunea dreptei ce trece prin I și este paralelă cu dreapta (A B). Coordonatele lui I fiind 0 și $\frac{1}{2}$ avem:

$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

sau:
$$y+x-\frac{1}{2}=0.$$

Să calculăm valorile lui y pentru aceiași valoare a lui x deduse din ecuațiunea curbei și a dreptei A B. Notând aceste valori cu y_1 și y_2 avem:

$$y_1=-x+\frac{1}{2}$$

$$y_2=\sqrt{x^2-x}$$

de unde deducem:

$$y_1-y_2=-x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2-x}.$$

Ne propunem să calculăm către ce tinde această diferență când x tinde spre ∞. Pentru a ridica nedeterminarea $\infty-\infty$ sub care se prezintă y_1-y_2 pentru $n=\infty$ vom înmulți cu conjugata expresiunii. Obținem:

$$y_1-y_2=\frac{\left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2-x}\right]\left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x}\right]}{\left(-x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x}}$$

sau:
$$y_1-y_2=\frac{\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2-(x^2-x)}{-x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}}$$

sau:
$$y_1-y_2=\frac{\frac{1}{4}}{-x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}}$$

deci $\lim(y_1-y_2)_{x=\infty}=0$ de unde deducem că dreapta $y+x-\frac{1}{2}=0$ este o asimptotă a curbei.

Analog deducem că dreapta:

$$y-x+\frac{1}{2}=0 \quad \text{este o asimptotă.}$$

Aceste asimptote, paralele cu bisectoarele axelor, fiind rectangulare, rezultă că curba este o iperbolă echilateră.

Pentru ca M A = O A va trebui ca:

$$\left(\frac{1}{1-\lambda^2}-1\right)^2+\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}=1.$$

$$\therefore \quad \lambda^4+\lambda^2=1-2\lambda^2+\lambda^4$$

$$3\lambda^2=1 \qquad \text{deci:}$$

$$\therefore \quad \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dreptele sunt deci: $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ și $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Se știe însă că $\operatorname{tg}30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\operatorname{tg}150^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ deci cele două drepte fac unghiurilede 30^0 și 150^0 cu Ox.

Soluțiuni date de d-nii: *Bogdan C.* (stud. mat., Cluj), *Bârsu Petru* (lic. Sibiu), *Ciolacu C. Miron* (Șc. de artilerie), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Grofșoreanu I. Gh.* (Șc. Polit., Timișoara), *Iohașin Viorel* (Șc. Polit., Timișoara), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București),

Manolescu N. T. (Focșani), *Poper Ervin* (lic. Diaconovici, Timișoara), *Rabinovici H.* (lic. Cantemir, București), *Rusanda P. Gh.* (Șc. Polit., Timișoara), *Segărceanu C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Țanovici Gh. N.*, *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București) și *Vladimirshy V.* (lic. Tighina).

Soluțiuni parțiale date de d-nii: *Faibovici Henri* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Atanasiu M. C-tin* (Bolgrad), *Silistrărianu C.* (Ploești).

S'au mai primit două soluțiuni bune dar nesemnate.

545. — *Se se rezolve ecuația:*

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

știind că:

$$a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4) = c.$$

GH. GH. VASILIU

Folosim relația dată și relațiile cunoscute între rădăcini și coeficienții unei ecuații, adică:

$$(1) \qquad a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4) = c$$

$$(2) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$$

$$(3) \qquad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = b$$

$$(4) \qquad (x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2 = -c$$

$$(5) \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = d$$

Multiplicând relația (2) cu b și scăzând din (1), deducem:

$$(6) \qquad x_1 + x_2 = \frac{a b + c}{a - b}.$$

Multiplicând relația (2) cu a și scăzând-o din (1), deducem:

$$(7) \qquad x_3 + x_4 = \frac{a^2 + c}{b - a}.$$

Relațiile (3) și (4), ținând seama de (6) și (7), devin:

$$\begin{cases} \dfrac{(a b + c)(a^2 + c)}{(a - b)} + x_1 x_2 + x_3 x_4 = b \\ \dfrac{(a b + c)}{a - b} x_3 x_4 - \dfrac{a^2 + c}{a - b} x_1 x_2 = -0. \end{cases}$$

Aceste relații se mai pot scri:

$$\begin{cases} (8) \quad x_1 x_2 + x_3 x_4 = \dfrac{b(a - b)^2 + (a b + c)(a^2 + c)}{(a - b)^2} \\ (9) \quad (a^2 + c) x_1 x_2 - (a b + c) x_3 x_4 = c(a - b). \end{cases}$$

Multiplicând relația (8) cu $a b + c$ și adunând-o cu (9), deducem:

$$(10) \quad x_1 x_2 = \frac{b(a-b)^2(ab+c) + (ab+c)^2(a^2+c) + c(a-b)^3}{(a - b)^2(a^2 + a b + 2 c)}$$

Multiplicând relația (8) cu $a^2 + c$ și scăzând-o din (9), deducem:

$$(11) \quad x_3 x_4 = \frac{b(a-b)^2(a^2+c) + (ab+c)(a^2+c)^2 - c(a-b)^3}{(a - b)^2(a^2 + a b + 2 c)}$$

Având suma și produsul rădăcinelor x_1, x_2 și x_3, x_4, din relațiile (6), (10) și (7), (11), putem forma următoarele ecuații de pradul al 2-lea, în z și t.

$$(13) \qquad z^2 - \frac{a b + c}{a - b} z +$$

$$\frac{b(a-b)^2(a b+c) + (ab+c)^2(a^2+c) + c(a-b)^3}{(a - b)^2(a^2 + a b + 2 c)} = 0$$

$$(13) \qquad t^2 - \frac{a^2 + c}{b - a} t +$$

$$\frac{b(a-b)^2(a^2+c) + (ab+c)(a^2+c)^2 - c(a-b)^3}{(a - b)^2(a^2 + a b + 2 c)} = 0$$

ale căror rădăcini sunt respectiv x_1 x_2 și x_3, x_4.

Rezolvind ecuațiile (12) și (13), găsim astfel:

$$x_{1,2} = \frac{a b + c}{2(a - b)} \pm \frac{\sqrt{(a b + c)^2(a^2 + a b + 2 c) - 4 b(a - b)^2(a b + c) - 4(a b + c)^2(a^2 + c) - 4 c(a - b)^3}}{2(a - b)\sqrt{a^2 + a b + 2 c}}$$

$$x_{3,4} = \frac{a^2 + c}{2(b - a)} \pm \frac{\sqrt{(a^2 + c)^2(a^2 + a b + 2 c) - 4 b(a - b)^2(a^2 + c) - 4(a b + c)(a^2 + c)^2 + 4 c(a - b)^3}}{2(b - a)\sqrt{a^2 + a b + 2 c}}$$

Acestea sunt rădăcinele ecuației date.

Observare. Pentru ca ecuația dată să admită aceste rădăcini, trebue ca coeficienții ei să satisfacă relația:

$$[b(a-b)^2(ab+c)+(ab+c)^2(a^2+c)+$$
$$c(a-b)^3][b(a-b)^2(a^2+c)+(ab+c)(a^2+c)^2-$$
$$c(a-b)^3]\equiv d(a-b)^4(a^2+ab+2c)^2,$$

condiție ce o deducem din (5) înlocuind x_1x_2, x_3x_4 cu valorile lor date de relațiile (10) și (11).

Soluții parțiale date de d-nii: *Beșchea N-lae* (lic. Brașov), *Ciolacu Miron* (Sublocot. de Artilerie), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gradin I. Alexandru* (lic. Câmpina), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Manolescu Î. N-lae* (Șc. Polit., Timișoara), *Panțu I. Z.* (lic. Lazăr, București), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava), București) și *Vladimirschi Veniamin* (lic. Tighina).

PROBLEME PROPUSE

587. — Să se găsească patratele perfecte de forma $abbc$, unde a și c sunt cifre consecutive.

EUG. ST. IACOB

588. — Să se arate că expresia:

$$49^{8a+1}+121^{24b+1}+194^{112c+1}+1776^{1776d}-8,$$

este divizibilă cu 17, numerile a, b, c fiind întregi pozitive.

C. V. COSTACHESCU.

589*. — Să se stabilească identitatea:

$$n^2+8\sum_{k=2}^{n}(k-1)[n^2-(k-1)^2]=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3.$$

V. ALACI

590*. — Să se găsească soluțiile întregi ale ecuațiunei:

$$72z^2=4x^2+9y^2.$$

GH. CONSTANTINESCU

591*. — Fie AB coarda comună a două cercuri C_1 și C_2 ortogonale Diametrul variabil M_1N_1 din C_1, taie pe C_2 în M_2 și N_2. Dreptele AM_2 și BM_2 taie pe C_1 în P_1 și Q_1, iar dreapta AN_1 taie pe C_2 în P_2. Să se arate că:

1°. Dreapta P_1Q_1 trece printr'un punct fix, când diametrul M_1N_1 variază.

2°. Dreptele N_1P_1 și M_2P_2 se taie sub un unghiu drept.

AUGUST COMAN

592*. — Se construește un triunghiu $A_1B_1C_1$ ale cărui vârfuri se găsesc pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghiu ABC și ale cărui laturi A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sunt paralele respectiv cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor C, A, B ale triunghiului ABC. Se construește din $A_1B_1C_1$ un triunghiu $A_2B_2C_2$ după cum s'a construit $A_1B_1C_1$ din ABC. Și așa mai departe. Să se demonstreze că dacă ABC este fix atunci ortocentrele și centrele cercurilor exînscrise triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... $A_iB_iC_i$ sunt puncte fixe. Să se găsească punctul limită al centrului cercului circumscris triunghiului $A_iB_iC_i$ când i crește continuu.

COL. GH. BUICLIU

593. — In orice triunghiu, expresia:

$$\sum\frac{R(a+b)\cos C\cdot h_a}{abc}$$

este constantă, notațiile fiind cele obicinuite.

CRAIU N. ION

594. — Să se stabilească relația:

$$\left(\frac{r_a-r}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{r_b-r}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{r_c-r}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)\times$$
$$\left(\frac{\sin^3\frac{A}{2}}{r_a-r}+\frac{\sin^3\frac{B}{2}}{r_b-r}+\frac{\sin^3\frac{C}{2}}{r_c-r}\right)=9.$$

EMIL STEFANESCU

INFORMATIUNI

Au fost admiși ca studenți regulați ai anului I (prim) în baza concursului dat și în ordinea clasificării următorii:

1. Atanasiu C. prep.
2. Manolescu N., R. M T.
3. Tăraș V., R. M. T.
4. Gheorghiu V., R. M. T.
5. Mașek V. prep., R. M. T.
6. Drăganciu A.
7. Eremia P.
8. Dângă V. prep., R. M. T.
9. Florea Al.
10. Giurumescu C.
11. Coliu A.
12. Luca B.
13. Păscariu A. prep., R. M. T.
14. Caraș Gh.
15. Franțiu A. prep, R. M. T.
16. Beldie D., R. M. T.
17. Gheorghe F.
18. Popescu V.
19. Novac A.
20. Olteanu E.
21. Vlădea I., R. M. T.
22. Babeș A.
23. Naherniac O. prep.
24. Balogh I.
25. Drăgan Gh., R. M. T.
26. Grigore T. I., R. M. T.
27. Chiserescu C.
28. Dugan V.
29. Gheorghiu I.
30. Ianculescu O., R. M. T.
31. Luminosu T.
32. Brote Gh. prep.
33. Crucian S,
34. Ern Gh.
35. Ionescu St.
36. Marcu A., prep.
37. Niculescu I. prep.
38. Scraba A.
39. Tudorache S.
40. Nicolau Gh. prep.
41. Georgescu E.
42. Sipoteanu I.
43. Chiroiu T. prep.
44. Coconea A.
45. Serb T., R. M. T.
46. Teodorescu V.
47. Ciocârlan M.
48. Bardan V.
49. Pănescu I.
50. Piso I., prep.
51. Ionescu A. S.
52. Saveliev V.
53. Stavrat C.
54. Popovici Lucia prep.
55. Marcu O.
56. Aposteanu Sp.
57. Bot I., R. M. T.
58. Negreu P. prep.
59. Popescu T.
60. Bolocan Gh.
61. Coconea Gh.
62. Hrehoreț R.
63. Rizescu Gh.
64. Hesz L.
65. Pol M.
66. Nagy I. prep.
67. Neamțu B. prep.
68. Rameder I.
69. Chircu R.
70. Gradin A., R. M. T.
71. Sava I.
72. Trofimov I.
73. Apăteanu C.
74. Calapod C.
75. Petrovici C.
76. Mașia I.
77. Puiu Gh.

Se vede astfel că tot corespondenții R. M. T., bine pregătiți prin exercițiile făcute, ocupă ca totdeauna primele locuri. Și dintre admiși sunt încă câțiva care au fost abonați la revistă și în anul acesta au renunțat, nu știm din ce motive. Pregătirea serioasă ce se face prin rezolvarea problemelor din revistă este astfel încă odată dovedită.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL VI. 15 DECEMBRIE 1926 No. 10

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. NICOLAE I. MANOLESCU. GENERALIZAREA UNOR IDENTITATI TRIGONOMETRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 18, 19.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 338, 529, 546, 560, 561, 571.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — No. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

GENERALIZAREA UNOR IDENTITAȚI TRIGONOMETRICE

de NICOLAE I. MANOLESCU

Inainte de a intra în subiectul pe care mi-am propus să-l tratez, voi face o observație asupra modului cum trebue întrebuințată această metodă de generalizare și anume: Relațiile trigonometrice pe care le voi generaliza nu vor fi decât *relații între unghiurile unui triunghiu.*

Voi lua astfel un triunghiu oarecare ale cărui unghiuri le voi însemna cu A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}.

In acest triunghiu există atunci relația cunoscută:

a) $$\sin A_{2n} + \sin B_{2n} + \sin C_{2n} = 4 \cos \frac{A_{2n}}{2} \cos \frac{B_{2n}}{2} \cos \frac{C_{2n}}{2}$$

Voi înlocui unghiurile acestui triunghiu prin:

$$A_{2n} = 2^{2n} A - \frac{2^{2n}-1}{3}\pi\,;\quad B_{2n} = 2^{2n} B - \frac{2^{2n}-1}{3}\pi \text{ etc.}$$

în care $A+B+C=\pi$ înlocuindu-le în *a)* căpătăm:

b) $$\sum \sin\left[2^{2n}A - \frac{2^{2n}-1}{3}\pi\right] = 4\prod \cos\left[2^{2n-1}A - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2n}-1}{3}\pi\right],$$

însă $2^{2n}-1 = 4^n - 1 = (3+1)^n - 1 = 3^n + \ldots + 1 - 1 = \mathcal{M}3$ și cum tot $2^{2n}-1$ este impar înseamnă că expresia $\frac{2^{2n}-1}{3}$ este întreagă și fără rest, deci cantitatea $\frac{2^{2n}-1}{3}\pi$ reprezintă un număr impar de semi-cercuri pe care-l vom însemna pe scurt su $(2k+1)\pi$ și atunci *b* devine:

$$\sum \sin\left[2^{2n}A - (2k+1)\pi\right] = 4\prod \cos\left[2^{2n-1}A - \frac{2k+1}{2}\pi\right],$$

însă atunci: $\sin\left[2^{2n}A - (2k+1)\pi\right] = -\sin 2^{2n}A$

și $$\cos\left[2^{2n-1}A - \frac{2k+1}{2}\pi\right] = \sin 2^{2n-1}A$$

și astfel că *b* devine:

(1) $$\sin 2^{2n}A + \sin 2^{2n}B + \sin 2^{2n}C + 4\sin 2^{2n-1}A \sin 2^{2n-1}B \sin 2^{2n-1}C = 0.$$

Această relație conține în ea n identități trigonometrice făcând pe $n=1, 2, 3 \ldots n$.

Aceasta, se vede, generalizează identitatea *a)* cu toate că pe această cale această identitate este mai puțin generală, ca cea din C. de P., Trigon., pag. 395.

Dacă tot în *a)* facem acum:

$$A_{2n} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1}A \text{ etc.}$$

avem:

c) $$\sum \sin\left[\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1}A\right] = 4\prod \cos\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n}A\right]$$

sau cum:

$$\sin\left[\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1}A\right] = \sin 2^{2n+1}A$$

și:

$$\cos\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n}A\right] = \sin 2^{2n}A$$

și atunci *a)* devine:

(2) $$\sin 2^{2n+1}A + \sin 2^{2n+1}B + \sin 2^{2n+1}C = 4\sin 2^{2n}A \sin 2^{2n}B \sin 2^{2n}C$$

făcând și aici $n=0, 1, 2 \ldots$ căpătăm relații interesante.

II. Tot astfel pornind dela identitatea:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

și făcând aceleași substituții ca mai sus căpătăm alte două relații generale care sunt identice cu identitatea clasică:

$$\sum\cos nA+1=4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

pentru $n=4m$ sau $4m+2$.

III. Să luăm acum identitatea:

$$(c)\qquad \sum\frac{\cos A_1}{\sin B_1\sin C_1}=2$$

și să o generalizăm după această metodă:

făcând întâi $A_1=\left(2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}\pi\right]$ etc.

și observând că:

$$\sin A_1=\sin\left(2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}\pi\right)=-\sin 2^{2n}A$$

și:

$$\cos A_1=\cos\left(2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}\pi\right)=-\cos 2^{2n}A$$

avem:

$$(3)\qquad \frac{\cos 2^{2n}A}{\sin 2^{2n}B\sin 2^{2n}C}+\frac{\cos 2^{2n}B}{\sin 2^{2n}C\sin 2^{2n}A}+\frac{\cos 2^{2n}C}{\sin 2^{2n}A\sin 2^{2n}B}+2=0$$

și dacă acum facem transformarea:

$$A_1=\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi-2^{2n+1}A\quad\text{etc.}$$

avem observând că:

$$\sin A_1=\sin 2^{2n+1}A\quad\text{și}\quad\cos A_1=-2^{2n+1}A$$

$$(4)\qquad \frac{\cos 2^{2n+1}A}{\sin 2^{2n+1}C\sin 2^{2n+1}B}+\frac{\cos 2^{2n+1}B}{\sin 2^{2n+1}C\sin 2^{2n+1}A}+\frac{\cos 2^{2n+1}C}{\sin 2^{2n+1}A\sin 2^{2n+1}B}+2=0$$

și cum (3) nu diferă de (4) o putem pune într'o singură formulă adică:

$$(5)\qquad \frac{\cos 2^nA}{\sin 2^n\sin 2^nC}+\frac{\cos 2^nB}{\sin 2^nC\sin 2^nA}+\frac{\cos 2^nC}{\sin 2^nA\sin 2^nB}+2=0\qquad n=1,\ 2.$$

IV. In identitatea:

$$(d)\qquad \frac{\sin(A_1-B_1)}{\sin^3A_1\cos B_1-\sin^3B_1\cos A_1}=\frac{\sin(B_1-C_1)}{\sin^3B_1\cos C_1-\sin^3C_1\cos B_1}=\frac{\sin(C_1-A_1)}{\sin^3C_1\cos A_1-\sin^3A_1\cos C_1}$$

înlocuind:

$A_1=2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}\pi$ avem: observând că

$$\sin(A_1-B_1)=\sin 2^{2n}(A-B).$$

$$(6)\qquad \frac{\sin 2^{2n}(A-B)}{\sin^3 2^{2n}A\cos 2^{2n}B-\sin^3 2^{2n}B\cos 2^{2n}A}=\frac{\sin 2^{2n}(B-C)}{\sin^3 2^{2n}B\cos 2^{2n}C-\sin^3 2^{2n}C\cos 2^{2n}B}=\frac{\sin 2^{2n}(C-A)}{\sin^3 2^{2n}C\cos 2^{2n}A-\sin^3 2^{2n}A\cos 2^{2n}C}$$

dacă tot în (d) facem:

$A_1=\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi-2^{2n+1}A$ și observând că

$\sin(A_1-B_1)=-\sin 2^{2n+1}(A-B)$ obținem aceiaș formulă ca mai sus și deci pe (6) o mai putem scrie și:

$$(7)\qquad \frac{\sin 2^n(A-B)}{\sin^3 2^nA\cos 2^nB-\sin^3 2^nB\cos 2^nA}=\frac{\sin 2^n(B-C)}{\sin^3 2^nB\cos 2^nC-\sin^3 2^nC\cos 2^nB}=\frac{\sin 2^n(C-A)}{\sin^3 2^nC\cos 2^nA-\sin^3 2^nA\cos 2^nC}\qquad n=0,\ 1..$$

V. Identitatea:

$$(e)\qquad \sin^2A_1+\sin B_1\sin C_1\cos A_1=$$

$\sin^2B_1+\sin C_1\sin A_1\cos B_1=\sin^2C_1+\sin A_1\sin B_1\cos C$

transformată prin substituția $A_1=2^{2n}A-\frac{2^{2n}-1}{3}$

obținem:

$$\sin^2 2^{2n} A - \sin 2^{2n} B \sin 2^{2n} C \cos 2^{2n} A =$$
$$\sin^2 2^{2n} B - \sin 2^{2n} C \sin 2^{2n} A \cos 2^{2n} B =$$
$$\sin^2 2^{2n} C - \sin 2^{2n} A \sin 2^{2n} B \cos 2^{2n} C$$

acă tot în (*e*) facem acum transformarea:

$$A_1 = \frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1} A \text{ etc.}$$

bținem identitățile:

$$\sin^2 2^{2n+1} A - \sin 2^{2n+1} B \sin 2^{2n+1} C \cos^{2n+1} A = \ldots$$

i cum (8) este identic cu (9) avem formulele:

(10) $$\sin^2 2^n A - \sin 2^n B \sin 2^n C \cos 2^n A =$$
$$\sin^2 2^n B - \sin 2^n C \sin 2^n A \cos 2^n B =$$
$$\sin^2 2^n C - \sin 2^n A \sin 2^n B \cos 2^n C.$$

VI. Dacă în identitatea:

(*f*) $$\operatorname{cotg} A_1 + \frac{\sin A_1}{\sin B_1 \sin C_1} = \operatorname{cotg} B_1 + \frac{\sin B_1}{\sin C_1 \sin A_1}$$
$$= \operatorname{cotg} C_1 + \frac{\sin C_1}{\sin A_1 \sin B_1}$$

acem transformarea:

$$A_1 = 2^{2n} A - \frac{2^{2n}-1}{3}\pi$$

i observăm că:

$$\operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg}\left[2^{2n} A - \frac{2^{2n}-1}{3}\right] = \operatorname{cotg} 2^{2n} A$$

vem:

(11) $$\operatorname{cotg} 2^{2n} A - \frac{\sin 2^{2n} A}{\sin 2^{2n} B \sin 2^{2n} C} = \operatorname{cotg} 2^{2n} B -$$
$$\frac{\sin 2^{2n} B}{\sin 2^{2n} C \sin 2^{2n} A} = \operatorname{cotg} 2^{2n} C - \frac{\sin 2^{2n} C}{\sin 2^{2n} A \sin 2^{2n} B}$$

Dacă acum facem tot în (*f*):

$$A_1 = \frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1} A$$

i observând că:

$$\operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg}\left(\frac{2^{2n+1}+1}{3}\pi - 2^{2n+1} A\right) = -\operatorname{cotg} 2^{2n+1} A$$

și înlocuind obținem aceiași identitate ca și (11) deci o putem scrie mai general:

(12) $$\operatorname{cotg} 2^n A - \frac{\sin 2^n A}{\sin 2^n B \sin 2^n C} = \operatorname{cotg} 2^n B -$$
$$\frac{\sin 2^n B}{\sin 2^n C \sin 2^n A} = \operatorname{cotg} 2^n C - \frac{\sin 2^n C}{\sin 2^n A \sin 2^n B}.$$

VII. Dacă în identitatea d-lui *Col. Gh. Buicliu:*

(*g*) $$\sum \sin 2A_1 \sin 2B_1 + 2\sum \sin^2 A = 4\sum \sin^2 A \sin^2 B$$

facem transformările cuvenite, obținem formula:

(13) $$\sum \sin 2^{2n+1} A \sin 2^{2n+1} B + 2\sum \sin^2 2^{2n} A =$$
$$4\sum \sin^2 2^{2n} A \sin 2^{2n} B,$$

iar cealaltă fiind la fel ca formă putem scrie deci că:

(14) $$\sum \sin 2^{n+1} A \sin 2^{n+1} B + 2\sum \sin^2 2^n A =$$
$$4\sum \sin^2 2^n A \sin^2 2^n B.$$

VIII. Dacă în relația cunoscută:

(*h*) $$\sum \sin^2 A_1 = 2 + 2\cos A_1 \cos B_1 \cos C_1$$

facem aceleași transformări deducem, respectiv aceiași identitate generală care este:

(15) $$\sum \sin^2 2^n A = 2 - 2\cos 2^n A \cos 2^n B \cos 2^n C$$
$$n = 1,\ 2\ldots$$

IX. De asemenea din relația:

(*i*) $$\sum \cos^2 A_1 = 1 - 2\cos A_1 \cos B_1 \cos C_1$$

facem aceleași înlocuiri și deducem:

(16) $$\sum \cos^2 2^n A = 1 + 2\cos 2^n A \cos 2^n B \cos 2^n C$$
$$n = 1,\ 2\ldots$$

X. Dacă în identitatea:

(*j*) $$\prod (\operatorname{cotg} A_1 + \operatorname{cotg} B_1) = \pi \operatorname{cosec} A_1$$

facem ambele transformări, căpătăm formula generală:

(17) $$(\operatorname{cotg} 2^n A + \operatorname{cotg} 2^n B)(\operatorname{cotg} 2^n B + \operatorname{cotg} 2^n C)(\operatorname{cotg} 2^n C + \operatorname{cotg} 2^n A) + \operatorname{cosec} 2^n A \operatorname{cosec} 2^n B \operatorname{cosec} 2^n C = 0$$
$$n = 1,\ 2\ldots$$

XI. Dacă în identitatea:

$$(m)\quad \sum \operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cotg} C_1 + \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} B_1 \operatorname{cosec} C_1$$

facem aceleași înlocuiri, deducem foarte simplu identitatea mai generală:

$$(18)\quad \sum \operatorname{cotg} 2^n A = \operatorname{cotg} 2^n A \operatorname{cotg} 2^n B \operatorname{cotg} 2^n C - \operatorname{cosec} 2^n A \operatorname{cosec} 2^n B \operatorname{cosec} 2^n C.$$

XII. Identitatea:

$$(n)\quad \sum \frac{\operatorname{tg} A_1}{\operatorname{tg} B_1} + \sum \frac{\operatorname{tg} A_1}{\operatorname{tg} C_1} = \sec A \sec B \sec C - 2$$

transformată prin aceleași relațiuni ne dă identitatea generală:

$$(19)\quad \sum \frac{\operatorname{tg} 2^n A}{\operatorname{tg} 2^n B} + \sum \frac{\operatorname{tg} 2^n A}{\operatorname{tg} 2^n C} + \sec 2^n A \sec 2^n B \sec 2^n C + 2 = 0 \qquad n = 1, 2\ldots$$

XIII. In fine relația d-lui *Ing. I. Protopopescu:*

$$(p)\quad 2 \sin A_1 \sin B_1 = \cos C_1$$

se poate pune sub formă mai generală:

$$(20)\quad 2 \sin 2^n A \sin 2^n B + \cos 2^n C = 0 \qquad n = 1, 2\ldots$$

Cum se vede din această simplă metodă de transformare generală putem generaliza toate relațiile dintre unghiurile unui triunghiu oarecare, nu și între laturi și alte elemente căci în acest caz triunghiul nou care s'a format n'are unghiurile egale cu 2A, 2B, 2C de ex., ci cu $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$.

Nota. Se pot face generalizări întrebuințând și metoda de transformare:

$$(1')\quad A = \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{2^{2n+1}+1}{3} \pi - \frac{A}{2^{2n+1}} \text{ etc.}$$

$$(1'')\quad A' = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-1}{3} \pi + \frac{A_1}{2^{2n}} \text{ etc.}$$

relațiuni ce generalizează pe acelea din articolul d-lui *Gradin*, care sunt numai relațiuni între unghiurile unui triunghiu.

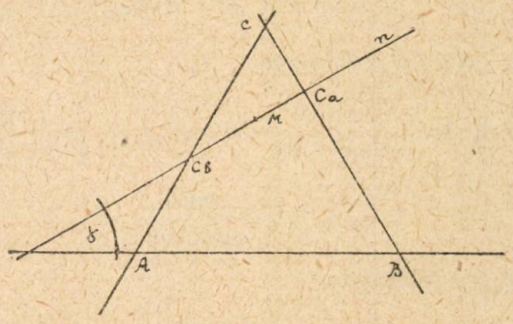
NOTE MATEMATICE

18. *Notes diverses sur la géométrie du triangl*

1. Considérons les trois droites:

$$(1)\quad \begin{cases} l = L_1 x + M_1 y + N_1 z = 0 \\ m = L_2 x + M_2 y + N_2 z = 0 \\ n = L_3 x + M_4 y + N_3 z = 0 \end{cases}$$

qui passent par le point $M(p, t, q)$ du plan d triangle ABC. Désignons par α, β, γ les an gles (l, BC), (m, CA), (n, AB) et par A_c et A les points d'intersection (l, BA), (l, CA). Soien B_a, B_c, C_b, C_a les points analogiques.



La figure donne immédiatement:

$$(2)\quad \begin{cases} AA_b = \dfrac{b L_1}{L_1 - N_1};\ BB_c = \dfrac{c M_2}{M_2 - L_2};\ CC_a = \dfrac{a N_3}{N_3 - M} \\ AA_c = \dfrac{c L_1}{L_1 - M_1};\ BB_a = \dfrac{a M_2}{M_2 - N_2};\ CC_b = \dfrac{b N_3}{N_3 - L} \end{cases}$$

et par conséquent:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{b(L_1 - M_1)}{c(L_1 - N_1)} = \dfrac{\sin(B - \alpha)}{\sin(C + \alpha)} \\ \dfrac{c(M_2 - N_2)}{a(M_3 - L_2)} = \dfrac{\sin(C - \beta)}{\sin(A + \beta)} \\ \dfrac{a(N_3 - L_1)}{b(N_3 - M_3)} = \dfrac{\sin(A - \gamma)}{\sin(B + \gamma)} \end{cases}$$

L'équation de la droite l peut se mettre sous la forme suivante:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & t & q \\ b\sin(C+\alpha) - c\sin(B-\alpha) & -b\sin(C+\alpha) & c\sin(B-\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$(5)\quad \begin{cases} -x\left[t\,c\sin(B-\alpha)+b\,q\sin(C+\alpha)\right]+ \\ y\left[c\,(p+q)\sin(B-\alpha)-b\,q\sin(C+\alpha)\right]+ \\ z\left[b\,(p+t)\sin(C+\alpha)-t\,c\sin(B-\alpha)\right]=0. \end{cases}$$

Aussi même, les équations des droites m et n sont :

$$\begin{cases} -y\left[q\,a\sin(C-\beta)+c\,p\sin(A+\beta)\right]+ \\ z\left[a\,(t+p)\sin(C-\beta)-c\,p\sin(A+\beta)\right]+ \\ x\left[c\,(t+q)\sin(A+\beta)-q\,a\sin(C-\beta)\right]=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z\left[p\,b\sin(A-\gamma)+a\,t\sin(B+\gamma)\right]+ \\ x\left[b\,(q+t)\sin(A-\gamma)-a\,t\sin(B+\gamma)\right]+ \\ y\left[a\,(q+p)\sin(B+\gamma)-p\,b\sin(A-\gamma)\right]=0. \end{cases}$$

Par suite, les égalités (2) prennent la forme :

$$(6)\quad \begin{cases} A\,A_b=\dfrac{t\,c\sin(B-\alpha)+q\,b\sin(C+\alpha)}{(p+t+q)\sin(C+\alpha)}; \\ B\,B_c=\ldots;\quad C\,C_a=\ldots; \\ A\,A_c=\dfrac{t\,c\sin(B-\alpha)+q\,b\sin(C+\alpha)}{(p+t+q)\sin(B-\alpha)}; \\ B\,B_a=\ldots;\quad C\,C_b=\ldots: \end{cases}$$

La figure donne immédiatement :

$$(7)\quad A_b\,A_c=\frac{\sin A\left[t\,c\sin(B-\alpha)+q\,b\sin(C+\alpha)\right.}{(p+t+q)\sin(C+\alpha)\sin(B-\alpha)};$$
$$B_c\,B_a=\ldots;\quad C_a\,C_b=\ldots$$

2°. *Probléme. Trouver les coordonnées du point* M *dans l'hypothése, que l'on a :*

$$A_b\,A_c=B_c\,B_a=C_a\,C_b.$$

Les coordonnées inconues satisfont aux équations :

$$(8)\quad \begin{aligned} &\frac{\sin A\left[t\,c\sin(B-\alpha)+q\,b\sin(C+\alpha)\right]}{\sin(C+a)\sin(B-\alpha)}= \\ &\frac{\sin B\left[q\,a\sin(C-\beta)+p\,c\sin(A+\beta)\right]}{\sin(A+\beta)\sin(C-\beta)}= \\ &\frac{\sin C\left[p\,b\sin(A-\gamma)+t\,a\sin(B+\gamma)\right]}{\sin(B+\gamma)\sin(A-\gamma)}. \end{aligned}$$

En résolvant ce systéme par rapport à p, t, q, ou trouve :

$$(9)\quad p:t:q=a\left[\frac{1}{\sin(A-\gamma)\sin(B-\alpha)}+\right.$$
$$\frac{1}{\sin(C-\gamma)\sin(A+\beta)}-\frac{1}{\sin(A-\gamma)\sin(A+\beta)}:\ldots:\ldots$$

3. Considérons quelques cas rémarquables.

I) $\alpha=\beta=\gamma$; $A_b\,A_c$, $B_c\,B_a$, $C_a\,C_b$ sont les paralléles à BC, CA, AB. Le point M *(centre de paralléles éguaux)* a pour les coordonées :

$$(10)\quad -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

et :

$$(11)\quad A_b\,A_c=B_c\,B_a=C_a\,C_b=\frac{2\,a\,b\,c}{b\,c+c\,a+a\,b}.$$

II) $\alpha=\beta=\gamma$; $A_b\,A_c$, $B_c\,B_a$, $C_a\,C_b$ sont les perpendiculaires à BC, CA, AB. Le point M est l'orthocentre.

III) $\alpha=B-C$, $\beta=C-A$, $\gamma=A-B$; $A_b\,A_c$, $B_c\,B_a$, $C_a\,C_b$ sont les antiparalléles à BC, CA, AB. Le point M *(centre de antiparalléles égaux)* a pour les coordonnées :

$$(12)\quad a^2,\ b^2,\ c^3$$

et :

$$(13)\quad A_b\,A_c=B_c\,B_a=C_a\,C_b=\frac{2\,a\,b\,c}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\text{IV)}\quad \alpha=\frac{B-C}{2},\quad \beta=\frac{C-A}{2},\quad \gamma=\frac{A-B}{2};$$

les triangles $A\,A_b\,A_c$, $B\,B_c\,B_a$, $C\,C_a\,C_b$ sont isoscéles ; pour cette raison nous appelons les droites $A_b\,A_c$, $B_c\,B_a$, $C_a\,C_b$ *isotransversales*. Le point M *(centre de isotransversales égales)* a pour les coordonées :

$$(14)\quad \begin{cases} a\left(\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}-\cos\dfrac{A}{2}\right) \\ b\left(\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{B}{2}\right) \\ c\left(\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}-\cos\dfrac{C}{2}\right) \end{cases}$$

et :

$$(15)\qquad A_b A_c = B_c B_a = C_a C_b = \frac{8}{(p-a)\cos\frac{A}{2} + (p-b)\cos\frac{B}{2} + (p-c)\cos\frac{C}{2}}$$

V) $\alpha = B - 90^0$; $\beta = C - 90^0$; $\gamma = A - 90^0$

$\beta = 90^0 - C$: $\beta = 90^0 - A$; $\gamma = 90^0 - B$:

les triangles $A A_b A_c$, $B B_c B_a$, $C C_a C_b$ sont rectangles ; les droites $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ nous appelons *orthotransversales. Les centres de orthotransversales égales* ont pour les coordonnées :

$$(16)\quad \begin{cases} a\left(1+\dfrac{1}{\cos A\cos B}-\dfrac{1}{\cos B}\right),\ b\left(1+\dfrac{1}{\cos B\cos C}-\dfrac{1}{\cos C}\right),\ c\left(1+\dfrac{1}{\cos C\cos A}-\dfrac{1}{\cos A}\right) \\ a\left(1+\dfrac{1}{\cos A\cos C}-\dfrac{1}{\cos C}\right),\ b\left(1+\dfrac{1}{\cos B\cos A}-\dfrac{1}{\cos A}\right),\ c\left(1+\dfrac{1}{\cos C\cos B}-\dfrac{1}{\cos B}\right) \end{cases}$$

VI) $\alpha = B - A$, $\beta = C A$, $\gamma = A - B$

$\alpha = A - C$, $\beta = B - A$, $\gamma = C - B$; les triangles $A A_b A_c$, $B B_c B_a$, $C C_a C_b$ sont isoscéles ($A A_c = A_b A_c \ldots$) ; les droites $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ nous appelons *équitransversales. Les centres de équitransversales égaux* ont pour coordonnées :

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sin C}\left(\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin 2A}-\dfrac{1}{\sin C}\right); \\ \dfrac{a}{\sin B}\left(\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin 2A}-\dfrac{1}{\sin B}\right) \\ \dfrac{b}{\sin A}\left(\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin 2B}-\dfrac{1}{\sin A}\right); \\ \dfrac{b}{\sin C}\left(\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin 2B}-\dfrac{1}{\sin C}\right) \\ \dfrac{c}{\sin C}\left(\dfrac{1}{\sin C}+\dfrac{1}{\sin 2C}-\dfrac{1}{\sin B}\right); \\ \dfrac{c}{\sin A}\left(\dfrac{1}{\sin C}+\dfrac{1}{\sin 2C}-\dfrac{1}{\sin A}\right) \end{cases}$$

Sans doute il est utile introduire nos points dans l'inventaire de géométrie du triangle.

N. AGRONOMOF
Vladivostok, Université
Institul Mathématique

19 — *Asupra unor identităţi.* Este vorba de a verifica identitatea :

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Punem în general $x+y=-b$, $xy=c$, $s_m = x^m + y^m$ considerând pe x şi y rădăcinele ecuaţiei : $z^2 + bz + c = 0$ unde avem :

$$(1)\quad \begin{cases} s_1 + b = 0 \\ s_2 + b s_1 + 2c = 0 \\ s_3 + b s_2 + c s_1 = 0, \end{cases}$$

de unde $s_1 = -b$; $s_2 = b^2 - 2c$; $s_3 = 3bc - b^3$ sau altfel :

$$(2)\qquad s_7 + b s_6 + c s_5 = 0$$

$$(3)\qquad s_6 + b s_5 + c s_4 = 0$$

$$(4)\qquad s_5 + b s_4 + c s_3 = 0$$

$$(5)\qquad s_4 + b s_3 + c s_2 = 0.$$

Inmulţind (2) cu s_1, (3) cu $s_2 + c$, (4), cu $s_3 - bc$ şi adunând avem :

$$s_7 + (b+s_1)s_6 + (2c + bs_1 + s_2)s_5 + (cs_1 + bs_2 + s_3)s_4 + c(s_2+c)s_3 + (s_3 - bc)(bs_3 + cs_2) = 0$$

sau ţinând seamă de (1) avem :

$$s_7 + c(s_2+c)s_3 + (s_3 - bc)(s_3 + cs_2) = 0.$$

Inlocuind s_2 şi s_3 prin valorile lor, avem :

$$s_7 + b^7 - 7bc(b^2 - c)^2 = 0$$

sau :

$$(x^7+y^7) - (x+y)^7 + 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 = 0$$

Putem deci să generalizăm. Dacă vrem să găsim s_{2p+1}, n'avem decât să calculăm cele p cantităţi ; $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_p$ şi să eliminăm prin acest procedeu $s_{p+1} \ldots s_{2p}$. De exemplu, să calculăm s_1 şi s_2. Putem scri ecuaţiile :

$$(6)\qquad s_5 + b s_4 + c s_3 = 0$$

$$(7)\qquad s_4 + b s_3 + c s_2 = 0$$

$$(8)\qquad s_3 + b s_2 + c s_1 = 0.$$

Inmulțind (7) cu s_1 și (8) cu $s_2 + c$, se vede că coeficientul lui s_4 și s_3 se anulează, prin urmare:

$$s_5 + c\,s_1\,s_2 + (b\,s_2 + c\,s_1)(s_2 + c) = 0,$$

de unde înlocuind pe s_1 și s_2 prin valorile lor:

$$s_5 + b^5 - 5\,b\,c\,(b^2 - c) = 0,$$

sau înlocuind cu valorile dela început avem:

$$x^5 + y^5 - (x+y)^5 - 5\,x\,y\,(x+y)(x^2 + x\,y + y^2) = 0$$

sau:

$$(x+y)^5 - (x^5 + y^5) = 5\,x\,y\,(x+y)(x^2 + x\,y + y)$$

TH STOICESCU
Liceul Internat, Iași

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 3, Noembrie 1926. Neegalități trigonometrice (urmare), de *I. Ionescu*. Seriile recurente și ecuațiile integrale, de *M. Ghermănescu*. Problema simultaneității, de *Șerban Gheorghiu*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului, *„Vasile Conta"*. Concursul *„Gazetei Matematice"*. *Premiul „Anghel Saligny"*.

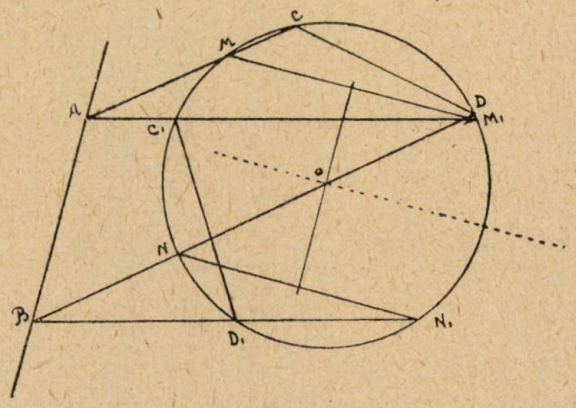
2. *Revista de Ciencias*, ano XXIX, No. 7, à 9, 1926. La teoria especial de la relatividad y nouestros puntos de vista, de Dr. Ing. *Godofredo Garcia*. Chloris cuzcoensis, de Dr. *Fortunato L. Herrera*. Los fundamentos termodinámicos de la mecánico quimica, de Dr. *José M. Plans*.

PROBLEME REZOLVATE

338. — *Se dă un cerc și două puncte* A *și* B. *Să se construiască un trapez isoscel* A B C D, *având* C *și* D *pe cerc și admițând* A B *ca latură neparalelă.*

P. TROFINOV

Prin centrul O al cercului ducem o perpendiculară pe dreapta A B. La această perpendiculară ducem două paralele simetrice față de O, depărtate între ele cu distanța A B, paralele ce întâlnesc cercul respectiv în $M M_1$ și $N N_1$. Ducem apoi dreptele A M și B N care taie cercul respectiv în C și D, apoi $A M_1$, $B N_1$ care taie cercul în C_1, D_1. A B C D și $A B C_1 D_1$ sunt trapezele isoscele, în condițiile problemei. In adevăr din construcția



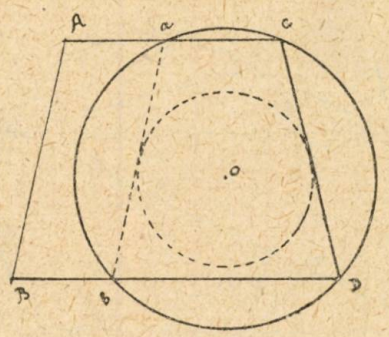
făcută, rezultă că M N e egal și paralel cu A B, dar M N = C D ca fiind coarde cuprinse între paralele, deci A B = C D și A C ∥ B D urmează că A B C D este un trapez isoscel; analog $A B C_1 D_1$.

Problema admite astfel două soluții. In caz când punctele A și B sunt pe cerc, avem o infinitate de trapeze, căci orice coardă C D egală cu A B formează cu A B un trapez isoscel.

Dacă A B ar fi mai mare ca diametru cercului, n'am avea nici o soluție:

Soluții date de: *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Călniceanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Comănescu A. D.-Bălteni, Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Damșescu Aurel* (Orșova), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Drăghicean M.* (lic. Botoșani), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., București), *Gavrilescu I. N.* (lic. Ploești), *Gheorghiu C-tin A. drian, Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, București), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), *Iliescu Mircea-Zătreni. Iliuță Ion-Dăbuleni* (lic. Caracal), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihăilescu Tase* (lic. Brașov), *Motaș C.* (București), *Neumann Maria* (studentă), *Podeanu P. Aurel* (lic. Pitești), *Popescu Ep.* (lic. Galați), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici I. Ioan* (Șc. Polit., București), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Roșu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Stamatiu I. M.* (Șc. Polit., București), *Ștefănescu Emil* (Șc. Polit., București), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Altă soluție. Presupunem problema rezolvată și fie A B C D trapezul cerut. Fie *a*, *b* punctele în care dreptele A C și B D taie cercul. Ducem coarda *a b*, care este egală cu coardă C D, căci $\overset{\frown}{ab} = \overset{\frown}{CD}$ ca arce cuprinse între paralele.



Pe de altă parte $\sphericalangle abD = CDb$ şi cum $\sphericalangle CDb = \sphericalangle ABD$, urmează că $\sphericalangle abD = \sphericalangle ABD$ şi fiindcă aceste unghiuri sunt şi corespondente urmează că $AB \parallel ab$. Observăm că dacă dreapta ab ar fi determinată, am putea construi trapezul, unind A cu a şi B cu b şi prelungind pânăce întâlneşte cercul. Insă dreapta ab fiind de lungime cunoscută, ea va fi tangentă la un cerc concentric cu O şi a cărei rază e egală cu perpendiculara scoborâtă din O pe dreapta ab. Dreapta ab fiind şi paralelă cu AB, problema se reduce la a construi la un cerc o tangentă paralelă cu o dreaptă dată, problemă cunoscută, şi fiindcă putem duce două paralele, avem în general două soluţii.

Se menţin observările din prima soluţie.

Soluţii date de d-nii: *Berdan C.* (Bucureşti), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani) şi *Manoil Eugen* (Maior).

529. — *Să se descompună în factori, suma:*

$$\sum_{i=0}^{35} x_i.$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-l *V. Vladimirschi* (lic. Tighina).

Suma dată se poate scri succesiv:

$$\sum_{i=0}^{35} x^i = 1+x+x^2(1+x)+x^4(1+x)+\ldots+x^{34}(1+x)$$

$$= (1+x)\left[1+x^2+x^4(1+x^2)+x^8(1+x^2)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+x^{32}(1+x^2)\right] = (1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8+$$

$$x^{12}+x^{16}+x^{20}+x^{24}+x^{28}+x^{32}) =$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)(1+x^{12}+x^{24}).$$

Observând că în general:

$$1+x^{2a}+x^{4a} = (1+x^{2a})^2 - x^{2a} =$$

$$(1+x^a+x^{2a})(1-x^a+x^{2a}) \quad (a \text{ întreg}),$$

putem scri încă:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{35} x^i = (1+x)(1+x^2)(1+x^2+x^4)(1-x^2+x^4)(1+x^6+x^{12})(1-x^6+x^{12}) =$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1-x^3+x^6)(1-x^6+x^{12}).$$

Soluţie dată de d-ra *Antoaneta Costinescu* (Institutul, Ortodox).

Avem o progresie geometrică, cu raţia x, deci:

$$\sum_{i=0}^{25} x^i = \frac{x^{36}-1}{x-1}.$$

Observând însă, că:

$$x^{36}-1 = (x^{18}+1)(x^{18}-1) = (x^{18}+1)(x^9-1)(x^9+1)$$

$$x^9-1 = (x^3-1)(x^6+x^3+1) = (x-1)(x^2+x-1)(x^6+x^3+1)$$

$$x^9+1 = (x^3+1)(x^6-x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$$

$$x^{18}+1 = (x^6+1)(x^{12}-x^6+1) =$$

$$(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^{12}-x^6+1),$$

putem scri:

$$x^{36}-1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^{12}-x^6+1).$$

Urmează că:

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{35} x^i = (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^{12}-x^6+1).$$

Descompunerile (1) şi (2) sunt aceleaşi şi cuprind numai coeficienţi reali.

Observări. 1°. Dacă admitem şi coeficienţi iraţionali, observăm că:

$$x^4-x^2+1 = (x^2+1)^2-(\sqrt{3}\,x)^2 =$$

$$(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1)$$

$$x^{12}-x^6+1 = (x^6+1)^2-(\sqrt{3}\,x^3)^2 =$$

$$(x^6+\sqrt{3}\,x^3+1)(x^6-\sqrt{3}\,x^3+1),$$

și atunci:

$$\sum_{i=0}^{35} x^i = (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^6+\sqrt{3}x+1)(x^6-\sqrt{3}x+1).$$

2°. Dacă admitem în descompunere și coeficienți imaginari, atunci avem:

$$\sum_{i=0}^{35} x^i = \frac{x^{36}-1}{x-1}$$

și cum rădăcinele ecuației binoame:

$$x^{36}-1=0,$$

sunt:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{36} + i\sin\frac{2k\pi}{36} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots 35$$

rezultă:

$$\sum_{i=0}^{35} x^i = \prod_{k=1}^{35}\left(x - \cos\frac{k\pi}{18} - i\sin\frac{k\pi}{18}\right), \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Soluții parțiale date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Câlniceanu Gh.* (lic. T.-Jiu), *Ciolacu Miron* (Șc. Milit. de Artilerie), *Dânga S. Vlad* (Șc. Polit. Timișoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drâmbă N. C-tin* (lic. Galați), *Faibovici I. Henri* (Craiova), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Franțiu Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Grabovschi Eugeniu, Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), *Ianculescu Octavian* (Șc. de Pilotaj și Antrenament), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Isăcescu C. Ttty* (lic. Tg.-Jiu), *Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr), *Pascariu Alexe* (Șc. Polit. Timișoara), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popper Ervin* (Timișoara), *Segârceanu D. C.* (lic. Buzești, Craiova), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit. Timișoara), *Tari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Timișoara), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iași), *Zagoican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Au mai trimes soluții și d-nii; *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinu St. D-tru* (Chișinău), *Dumitru S. Dinu* (Școala de Conductor, Chișinău), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Iovanescu Dan* (lic. Carol, Craiova,) *Popescu N. Coraeliu* (lic. Carol), *Popescu N. Ion* (student Ciuj), *Sădulescu C. Mihail* (lic. R-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Stan I. Anreliau* (lic. Milit. Iași), și *Triculescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova).

546. — *Dacă $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ sunt arcele, ale căror tangente sunt respectiv egale cu rădăcinele ecuației:*

$$x^{2n+1} + p\,x^{2n} + p^2 x^{2n-2} + \ldots + p^{2n}x + p^{2n+1} = 0.$$

să se arate că avem:

$$\Sigma \operatorname{tg} a_1 = \operatorname{tg} \Sigma a_1$$

$$\Sigma \operatorname{cotg} a_1 = \operatorname{cotg} \Sigma a_1.$$

RADULESCU C MIHAIL

$\operatorname{tg} a_1, \operatorname{tg} a_2, \ldots \operatorname{tg} a_{2n+1}$ fiind rădăcinele ecuației date, relațiile între rădăcinele și coeficienții ei sunt:

$$\begin{aligned} &\Sigma \operatorname{tg} a_1 = -p_2 \\ (1)\qquad &\Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 = p^2 \\ &\ldots\ldots \\ &\Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_{2n+1} = -p^{2n+1} \end{aligned}$$

Pe de altă parte cunoaștem desvoltarea:

$$\operatorname{tg}\Sigma a_1 = \frac{\Sigma \operatorname{tg} a_1 - \Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3 + \ldots - \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_n}{1 - \Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 + \ldots - \Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_n}$$

care în virtutea relațiilor (1) se poate scri succesiv:

$$\operatorname{tg}\Sigma a_1 = \frac{-p + p^3 - \ldots + p^{2n+1}}{1 - p^2 + p^4 - \ldots - p^{2n}} = -p. = \Sigma \operatorname{tg} a_1$$

și astfel prima relație cerută este stabilită.

Pentru a stabili relația 2-a, observăm că:

$$(2)\qquad \operatorname{cotg}\Sigma a_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\Sigma a_1} = -\frac{1}{p}.$$

$$(3)\qquad \Sigma \operatorname{cotg} a_1 = \Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} a_1} = \frac{\Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_{2n}}{\operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_{2n+1}} = \frac{p^{2n}}{-p^{2n+1}} = -\frac{1}{p}.$$

Din (2) și (3) deducem:

$$\Sigma \operatorname{cotg} a_1 = \operatorname{cotg} \Sigma a_1.$$

și astfel a 2-a relație cerută este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Atanasiu C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Both Ioan* (Gherla), *Drăgan G.* (Brașov), *Dumitrescu I. Eugen* (Buzău), *Fayon Albert* (lic. Lazăr, București), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Victor* (lic. Tg.-Jiu), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Manolescu I. N-lae* (Șc. Polit., Timișoara), *Morțun Emil* (București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu I. Z.* (lic. Lazăr, București), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Vladimirschy Veniamin* (Tighina), *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara) și *Winkler Alfred* (Semin. Pedag. Iași).

560. — *Să se stabilească identitatea:*

$$16\,ab=\left[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}\right]^2-$$
$$\left(a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b}\right)^2.$$

S. SAVU

Pornim dela membrul al 2-lea şi desvoltăm calculele, avem succesiv:

$$\left[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}\right]^2-\left(a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b}\right)$$
$$=a^2b^2+(a^2-4b)(b^2-4a)+2ab\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}$$
$$-a^2(b^2-4a)-b^2(a^2-4b)-2ab\sqrt{(b^2-4a)(b-4a)}$$
$$=a^2b^2+a^2(b^2-4a)-4b^3+16ab-a^2(b^2-4a)$$
$$-a^2b^2+4b^3=16ab.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţie dată de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Bolgrad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bărbulescu M. Tudor* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beşchea N-lae* (lic. Braşov), *Catz Baruh* (lic. Cahul), *Cădariu I.* (lic. Arad), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Cercel Şt. C.* (lic. Târgovişte), *Chinie A. Mihail* (lic. Piteşti), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iaşi), *Costinescu Antoaneta* (Inst. Ortodox, Iaşi), *Craiu N. Ioan* (lic. Piteşti), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Craiova), *Dângă S. Vladimir* (Şc. Polit., Timişoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu C. Oprea* (Şc. Milit., Cernăuţi), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dobrescu Ana* (Bucureşti), *Dobromirescu Pantelie* (lic. Caracal), *Dordea N-lae* (lic. Sibiu), *Dragnea Gh. Ovidiu* (lic. Roman), *Drăgan Gh.* (Braşov), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Dumitrescu Nathalia* (Şc. Normală, Bucureşti), *Duport George* (Bucureşti), *Faibovici I. Henri* (Craiova), *Fayon Albert* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Florescu Th. C-tin* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu S. George* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gradin I. Alexandru* (lic. Câmpina), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grigore Ion* (lic. Piteşti), *Grozda C.* (lic. Arad), *Gurău Gh. Al.* (Galaţi), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamţ), *Haralamb P. Eugeniu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Iacob St. Eugen* (Botoşani), *Iovănescu Petru* (Craiova), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Isăcescu Titi* (Şc. milit. de Geniu), *Kindin Simionov* (lic. Tulcea), *Manolescu I. N-lae* (Şc. Polit., Timişoara), *Mara Ştefan, Marinescu N. N-lae* (lic. milit., Iaşi), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mateescu I. Ion* (Predeal), *Mătăsaru Traian, Munteanu Zeno* (lic. Arad), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Müller C. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nicolau A. Vasile* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pascariu Alex.* (Şc. Polit., Timişoara), *Pascu Sebastian* (lic. Cluj), *Pavelescu Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Philips Ioseph* (student), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. Corneliu* (lic. Caracal), *Popescu N. Ioan* (student, Cluj), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popper Ervin* (Timişoara), *Procopescu G. Nestor* (lic. Caracal), *Rădulescu C. M.* (lic. R.-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Roman S.* (lic. Bacău), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Semo Santo* (Silistra), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. milit., Iaşi), *Stan C.* (Roman), *Steblea Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Triculescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu Bartolomeu* (student, Bucureşti), *Vasiliev Ilie* (Tulcea), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Timişoara), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Vladimirschi V.* (Tighina), *Vonica C. Ioan* (Gorjiu), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Winckler Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa), *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti) şi *Zăgaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău).

561. — *Să se stabisească identitatea:*

$$3\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t-\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t=4\frac{\sin^2 2kt}{\sin t}$$

V. ALACI

Dacă în formula cunoscută care însumează sinusurile arcelor în progresie aritmetică, anume:

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\sin(\alpha+2h)+\ldots$$
$$\ldots+\sin[\alpha+(n-1)h]=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nk}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

luăm succesiv:

$$\alpha=t.\quad h=2t,\quad n=2k$$

$$\alpha=(4k+1)t,\quad h=2t,\quad n=2k,$$

avem:

$$(1)\quad\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)=\frac{\sin[t+(2k-1)t]\sin 2kt}{\sin t}$$
$$=\frac{\sin^2 2kt}{\sin t}$$

$$(2)\quad\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t=$$

$$\frac{\sin\left[(4k+1)t+(2k-1)t\right]\sin 2kt}{\sin t}=\frac{\sin 6kt\sin 2kt}{\sin t}$$

Din relaţiunea (1) înmulţită cu (3), scădem relaţiunea (2) şi avem:

$$3\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t-\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t=$$

$$\frac{\sin 2kt}{\sin t}(3\sin 2kt-\sin 6kt)=$$

$$\frac{\sin 2kt}{\sin t}(3\sin 2kt-3\sin 2kt+4\sin^3 2kt)=4\frac{\sin^4 2kt}{\sin t}$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ). *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Bolgrad), *Băeanu O. Ion* (Făgăraş), *Bălăşescu N. C.* (Târgovişte), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Câlniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dânga S. Vlad* (Şc. Polit., Timişoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitriu Ath. Ioan* (lic. Galaţi), *Dordea Nicolae* (lic. Sibiu), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina-Olt), *Georgescu S. Gh.* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Gh. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Victor* (lic. Tg.-Jiu), *Iacob St. Eugen* (Botoşani), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iovănescu D-tru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Lepădatu I. Miclea, Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Muster H. D-tru* (Sem. Pedag., Bucureşti), *Müller C. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. Corneliu* (lic. Caracal), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Rădulescu C. M.* (lic. R.-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Segârceanu D. C.* (Craiova), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Triculescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (student, Bucureşti), *Vasiliev Ilie* (Tulcea), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (absolvent, lic. Timişoara), *Vladimirschi Veniamin* (Tighina), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi), *Zăgaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa).

Au mai trimes soluţii şi D-nii *Băcanu V. Ion* (lic. Făgăraş), *Carabeţeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Dimitrescu Sile* (Şc. Polit. Timişoara), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Piatra-Neamţ). *Niţulescu Gh. Victor* (lic. Caracal), *Păsăreanu C. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Santo Semo* (lic. Silistra) şi *Şoimulescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova).

571. — *Să se arate că fiecare din expresiunile:*

$$E_1=9^{999}+8^{888}+\ldots+2^{222}-1$$

$$E_2=9^{111}+8^{222}+\ldots+2^{888}-1,$$

este divizibilă cu 5.

POPOVICI C. C-TIN

Vom căuta restul diviziunei cu 5 a fiecărui termen în parte, observând că:

$2^0=M5+1$ $\quad$ $2^{m4}=M5+1$

$2^1=M5+2$ $\quad$ $2^{m4+1}=M5+2$

$2^2=M5+4$ $\quad$ $2^{m4+2}=M5+4$

$2^3=M5+3$ $\quad$ $2^{m4+3}=M5+3$

$2^4=M5+1$ $\quad$ $2^{m4+4}=M5+1$

$2^9=M5+2$ $\quad$ $2^{m4+5}=M5+2$

. . . . . $\quad$ . . . . . .

De aci rezultă:

$$9^{999}=(M5+4)^{999}=M5+2^{2(m4+3)}=$$
$$M5+2^{m4+2}=M5+4$$

$$8^{888}=(M5-2)^{888}=M5+2^{m4}=M5+1$$

$$7^{777}=(M5+2)^{777}=M5+2^{m4+1}=M5+2$$

$$6^{666}=(M5+1)^{666}=M5+1$$

$$5^{555}=M5$$

$$4^{444}=(M5-1)^{444}=M5+1$$

$$3^{333}=(M5-2)^{333}=M5-2^{m4+1}=M5-2$$

$$2^{222}=(M5+2)^{222}=M5+2^{m4+2}=M5+4.$$

Atunci rezultă:

$$E_1=M5+4+1+2+1+1-2+4-1=$$
$$M5+10=M5.$$

Asemenea observăm că:

$$9^{111}=(M5+4)^{111}=M5+2^{2(m4+3)}=$$
$$M5+2^{m4+2}=M5+4$$

$$8^{222}=(M5-2)^{222}=M5+2^{m4+2}=M5+4$$

$$7^{333}=(M5+2)^{333}=M5+2^{m4+1}=M5+2$$

$$6^{444}=(M5+1)^{444}=M5+1$$

$$5^{555}=M5$$

$$4^{666}=(M5-1)^{66}=M5+1$$

$$3^{777}=(M5-2)^{777}=M5-2^{m4+1}=M5-2$$

$$2^{888}=(M5+2)^{888}=M5+2^{m4}=M5+1.$$

Atunci rezultă:

$$E_2=M5+4+4+2+1+1-2+1-1=$$
$$M5+10=M5.$$

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Costăchescu V. C-tin* (lic. militar, Iaşi), *Dănciulescu Virgiliu* (lic. Fr. Bu-

zești, Craiova), *Dimitriu I.* (lic. Galați), *Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări Publice), *Florescu Th. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Iovănescu Felix, Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Nicolau A. Vasile* (lic. Matei-Basarab, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galați), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sarin Ioan* (lic. Milit., Iași), *Sprânceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Triculescu Ioan* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Tari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Observare. D-l *Novac Valeriu* (lic. Arad), *a demonstrat că și expresiile mai generale:*

$$E_1 = 9^{999999^{999999^{\cdots}}} + 8^{888888^{888888^{\cdots}}} + \cdots + 2^{222222^{222221^{\cdots}}} - 1$$

$$E_2 = 9^{111111^{111111^{\cdots}}} + 8^{222222^{222222^{\cdots}}} + \cdots + 2^{888888^{888888^{\cdots}}} - 1$$

sunt divizibile cu 5.

Au mai dat generalizări analoage, d-nii: *Costăchescu V. C-tin* (lic. milit., Iași) și *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați).

PROBLEME PROPUSE

595. — Pe o foaie de hârtie se află scris un patrat perfect de cinci cifre. Făcând diferența între cifra a 4^a și prima, găsim un număr N. Ștergând prima cifră și întorcând foaia spre dreapta de 180^0, găsim un număr la care diferența între numărul format de primele două cifre și numărul format de ultimele două cifre este tot N. Se cere acel patrat perfect.

COSTACHESCU V. C-TIN.

596. — Să se găsească un patrat perfect, care divizat cu numerile 3, 5 și 17 să dea respectiv resturile 1, 4 și 9.

V. ALACI

597. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz) = a \\ (z+x)(x^3+y^3+z^3-3xyz) = b \\ (z+x)(x^3+y^3+z^3-3xyz) = c \end{cases}$$

S. SAVU.

598. — Fie:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}.$$

Să se stabilească identitatea:

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 b_3 & c_1 b_3 & b_2 a_3 & d_2 a_3 \\ a_1 d_3 & c_1 d_3 & b_2 c_3 & d_2 c_3 \\ b_1 b_4 & d_1 b_4 & a_2 a_4 & c_2 a_4 \\ b_1 d_4 & d_1 d_4 & a_2 c_4 & c_2 c_4 \end{vmatrix}$$

N. G. BOTEA

599. — Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Fie C′ piciorul bisectoarei unghiului C pe AB și H piciorul înălțimei AH. Perpendiculara în C′ pe AB întâlnește pe AH în D. Să se demonstreze că lungimele BC′ și A′D sunt egale între ele.

COL. GH. BUICLIU

600. — Se dă triunghiul ABC. Tangenta în B la cercul O circumscris lui ABC tae pe AC în D. Cercul O_1 circumscris lui BCD tae pe AB în E. Să se demonstreze că:

1°. Triunghiul BDE e isoscel.

2°. Cercul circumscris lui ACE e tangent dreptei DE.

3°. Dreapta AO este perpendiculară pe DE.

ION PROTOPOPESCU

601. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum \frac{a r_b^2 r_c^2 \cot \frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} - \sum \frac{a r_a^2 \cot \frac{A}{2}}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} = 4Rp^2,$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

ALEXANDRU PODARIU

602. — Să se construiască triunghiul dreptunghiu în care există relația:

$$\sin^2 C = \sin B.$$

TRAIAN BEJU

INFORMATIUNI

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

A apărut „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ediția III, carte prea bine cunoscută, pe care o recomandăm călduros corespondenților noștri.

Prețul 180 lei.

A apărut, *Curs de rezistența materialelor*, de d-l *Constantin C. Teodorescu*, Inginer-Șef, profesor la Școala Politechnică din *Timișoara*. Acest curs cuprinde lecțiunile făcute de autor, cu studenții anului II și III ai Școalei Politechnice din *Timișoara*.

Tipărit într'o formă foarte îngrijită și clară, cu numeroase figuri ireproșabil construite, cartea este menită a fi de un real folos studenților noștri technici și tuturor acelor ce vor să aibă un tratat clar, concis și complect de *rezistența materialelor*.

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 IANUARIE 1926 No. 11

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. ION PROTOPOPESCU. ASUPRA NEEGALITATILOR TRIGONOMETRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 20, 21.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 488, 553, 556. 564, 566, 570, 575, 576, 581, 588, 589.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI. — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA NEEGALITAȚILOR TRIGONOMETRICE

de ION PROTOPOPESCU

Intr'o serie de articole publicate în G. M., (No. 1, 3 și 4) d. *Profesor Ion Ionescu* a arătat cum trebuesc studiate neegalitățile trigonometrice.

In cele ce urmează voi indica un procedeu care ușurează mult cercetarea intervalelor admisibile în special în cazul când neegalitatea se descompune într'un număr de mai mulți factori.

1. In prealabil voi aminti următoarele:

a) O funcție trigonometrică a unui multiplu de-a variabilei independente are ca per oadă de variațiune perioada normală a funcțiunii împărțită prin coeficientul variabilei independente.

Astfel:

$y = \sin \frac{2}{5} x$ are ca perioadă $\frac{5}{2} 2\pi = 5\pi$

$y = \operatorname{tg} \frac{8}{7} x$ „ „ „ $\frac{7}{8} \pi$

Acest fapt bine cunoscut și a cărei demonstrație este evidentă [1]) ne va servi în cercetarea mai comodă a intervalelor admisibile.

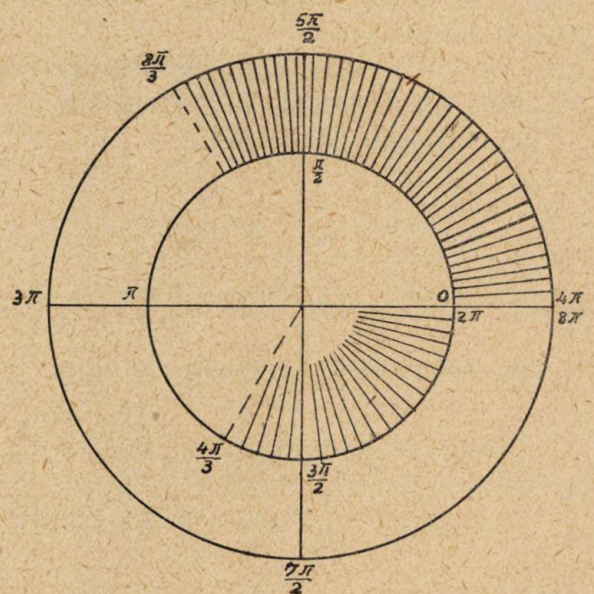
Reprezentarea grafică a intervalelor admisibile se poate face cu ușurință.

Să presupunem neegalitatea:

$$\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < 0. \tag{1}$$

Această neegalitate este verificată numai de arce cuprinse în cadranele II și III când cosinusul e negativ și a căror valoare este cuprinsă între $\frac{2\pi}{3}$ și $\frac{4\pi}{3}$ adică $\frac{2\pi}{3} < \frac{x}{2} < \frac{4\pi}{3}$ cu excepția extremităților intervalului pentru care neegalitatea se transformă în egalitate.

Rezultă de aici $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{8\pi}{3}$ cu diagrama din fig. 1.



Neegalitatea:

$$\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} > 0 \tag{2}$$

are ca intervale admisibile zonele nehașurate.

Pentru $x > 4\pi$ intervalele se repetă periodic.

Perioada unui produs este c. m. m. c. al perioadelor factorilor.

b) Dacă o funcție de funcție trigonometrică admite ca soluție valoarea pentru care funcția trigonometrică e maximă sau minimă, funcția dată trece prin soluție fără să schimbe de semn.

1) A fost amintit și în articolele citate art. I sub 2, pag. 15.

Acest fapt, analog cu cel cunoscut dela funcțiile algebrice, e evident căci în acel punct funcția întorcându-se de aceiași parte a axei de x nu mai schimbă semnul.

In acest sens funcțiunea:

$$y = \sin x - 1 \tag{3}$$

anulându-se pentru $\sin x = 1$ valoare care constitue pentru $\sin x$ maximum, y trece prin valoarea zero fără să schimbe de semn.

Analog:

$$y = \sec x - 1 \tag{4}$$

se anulează pentru $\sec x = 1$ și cum această valoare e un minim pentru $\sec x$, y trece prin zero fără să schimbe semnul.

2. Cu aceste noțiuni fixate studiul neegalităților se poate face cu ușurință în felul următor.

Să presupunem neegalitatea:

$$y = \frac{\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{x}{2}\right](\cos x + 1)}{\left(\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1)(\cos^2 x - 2)} > 0. \tag{5}$$

Vom scrie această inegalitate sub forma:

$$y = \frac{\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right](\cos x + 1)}{\left(\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1)(\cos^2 x - 2)} > 0$$

sau:

$$y = 2\frac{\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)(\cos x + 1)}{\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sin x - 1)(\cos^2 x - 2)} > 0 \tag{5'}$$

Fiecare din factorii compunând această inegalitate se poate rezolva ușor și determinând rădăcinele putem urmări schimbările de semn.

In prealabil observăm că perioada primului factor este $\frac{4}{3}2\pi$, a celui de al doilea $4 \times 2\pi$, al celui de al treilea 2π. La numitor primul factor are perioada $2 \times 2\pi$, al doilea la fel, al treilea și al patrulea 2π. Cel mai mic multiplu comun al numerilor $\frac{8}{3}\pi$, 8π, 2π și 4π este 8π. Va trebui deci să ducem cercetarea arcelor până la valoarea $x = 8\pi$ care constitue perioada lui y.

Procedând la rezolvarea ecuațiilor pe care le obținem egalând fiecare factor cu zero, obținem.

Factorul $\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ se anulează pentru $x = \frac{4}{9}(3k + 1)\pi$.

Factorul $\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ se anulează pentru

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}(12k + 2)\pi. \\ x'' = \frac{2}{3}(12k - 4)\pi. \end{cases}$$

Factorul $\cos x + 1$ se anulează pentru $x = (2k + 1)\pi$.

Factorul $\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ se anulează pentru

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(8k + 1)\pi \\ x'' = \frac{1}{2}(8k + 3)\pi. \end{cases}$$

Factorul $\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ se anulează pentru

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(8k - 1)\pi \\ x'' = \frac{1}{2}(8k - 3)\pi. \end{cases}$$

Factorul $\sin x - 1$ se anulează pentru $x = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$.

Factorul $\cos^2 x - 2$ nu se anulează niciodată.

In expresiile de mai sus dăm lui k valorile 0, 1, 2, etc., până obținem toate soluțiile cuprinse între zero și 8π perioada lui y.

Formăm astfel tabloul:

x	$\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{16\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π, $\frac{28\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{40\pi}{9}$, $\frac{9\pi}{2}$, 5π, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{2}$, $\frac{52\pi}{9}$, $\frac{13\pi}{2}$, 7π, $\frac{64\pi}{9}$, $\frac{15\pi}{2}$, $\frac{76\pi}{9}$
$\sin\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$	$-\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ 0$
$\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$	$+\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$\cos x+1$	$+\ +\ +\ 0\ +\ +\ +\ +\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ +\ +\ +$
$\sin\frac{x}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\ -\ 0\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ 0\ +$
$\sin x-1$	$-\ -\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ -\ -\ -\ -$
$\cos^2 x-2$	$-\ -$
y	$+\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +$

Examinăm pentru coloana primă, cuprinsă între zero și $\frac{4\pi}{9}$, ce semn are fiecare factor. Însemnăm acest semn pe tabloul format și în fiecare interval pe o linie orizontală repetăm semnul până ce ajungem la o rădăcină. De aci înainte schimbăm semnul până la rădăcina următoare și așa mai departe. Pentru funcțiunile ca $\cos x+1$ sau $\sin x-1$ pentru care rădăcina în $\cos x$ sau $\sin x$ se confundă cu minimum sau maximum lui $\cos x$ și $\sin x$ semnele rămân neschimbate ceea ce de altfel e vizibil direct de oarece totdeauna $\cos x+1\geqq 0$ și $\sin x-1\leqq 0$.

După ce am complectat astfel tabloul numărăm pe coloane verticale numărul de semne minus $(-)$ și înscrim pentru y semnul ce rezultă adică $(+)$ pentru un număr par de $(-)$ și $(-)$ pentru un număr impar.

Pe ultima linie obținem intervalele admisibile pentru neegalitatea dată.

In exemplul ales intervale admisibile sunt în arce pozitive:

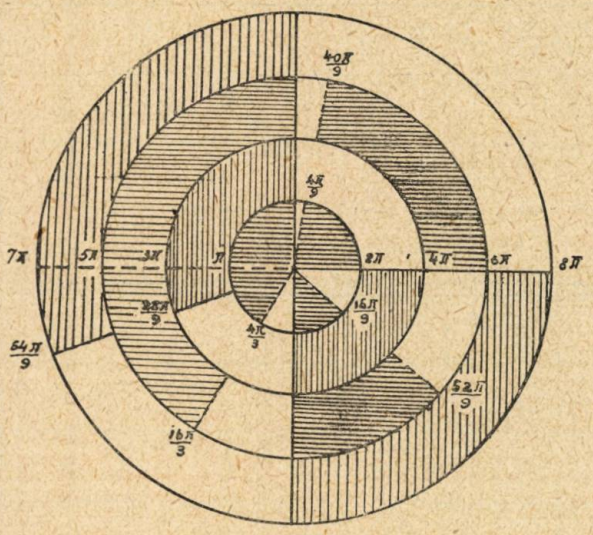
$$8k\pi\leqq x<8k\pi+\frac{4}{9}\pi,\quad 8k\pi+\frac{\pi}{2}\leqq x<8k\pi\frac{4\pi}{3},\quad 8k\pi+\frac{3\pi}{2}\leqq x<8k\pi+\frac{16\pi}{9}$$

$$8k\pi+\frac{5\pi}{2}\leqq x<8k\pi+\frac{28\pi}{9},\quad 8k\pi+\frac{7\pi}{2}\leqq x<8k\pi+\frac{40\pi}{9},\quad 8k\pi+\frac{9\pi}{2}\leqq x\leqq 8k\pi+\frac{16\pi}{3}$$

$$8k\pi+\frac{11\pi}{2}<x<8k\pi+\frac{52\pi}{9},\quad 8k\pi+\frac{13\pi}{2}\leqq x<8k\pi+\frac{64\pi}{9},\quad 8k\pi+\frac{15\pi}{2}\leqq x\leqq 8k\pi+8\pi.$$

Din aceste intervale se exclud valorile intermediare corespunzând rădăcinilor din numărător pentru care neegalitatea se transformă în egalitate și anume:

In al doilea interval valorile $8k\pi+\pi$, în al patrulea, valorile $8k\pi+3\pi$, în al șaselea $8k\pi+5\pi$, în al optelea $8k\pi+7\pi$, care se contrag în formula unică $(2k+1)\pi$.



Pentru valorile care anulează numitorul şi sunt limite de interval, pe o parte a limitei neegalitatea este verificată iar pe cealaltă parte nu, socotind o parte sau cealaltă după cum ne apropiem de limita intervalului prin valori crescânde sau descrescânde.

Rreprezentarea grafică a intervalului este dată de fig. 2.

NOTE MATEMATICE

20.—*Desvoltarea în serie a funcţiunilor sin my şi cos my.* In cele ce urmează voi arăta desvoltarea în serie a funcţiunilor sin my şi cos my prin aplicarea formulei lui *Taylor* care este:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(p)}(x)}{p!}h^p+\ldots+\frac{f^{(m)}(x)}{m!}h^m.$$

Să desvoltăm pe $\sin m(x+y)$ prin formula cunoscută din trigonometrie şi prin seria lui *Taylor*.

Avem:

$$\sin m(x+y)=\sin mx\cos my+\sin my\cos mx$$

$$\sin m(x+y)=\sin mx+\frac{y}{1!}m\cos mx-\frac{y^2}{2!}m^2\sin mx$$

$$-\frac{y^3}{3!}m^3\cos mx+\frac{y^4}{4!}m^4\sin mx+\frac{y^5}{5!}m^5\sin mx-\ldots$$

Avem deci:

$$\sin mx\cos my+\sin my\cos mx=$$

$$\sin mx\left(1-\frac{y^2}{2!}m^2+\frac{y^4}{4!}m^4-\frac{y^6}{6!}m^6+\frac{y^8}{8!}m^8-\ldots\right)+$$

$$\cos mx\left(\frac{y}{1!}m-\frac{y^3}{3!}m^3+\frac{y^5}{5!}m^5-\frac{y^7}{7!}m^7+\frac{y^9}{9!}m^9-\ldots\right)$$

Prin identificare obţinem formulele cunoscute:

$$\sin my=\frac{y}{1!}m-\frac{y^3}{3!}m^3+\frac{y^5}{5!}m^5-\frac{y^7}{7!}m^7+$$

$$\frac{y^9}{9!}m^9-\ldots(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}m^{2n+1}+\ldots$$

$$\cos my=1-\frac{y^2}{2!}m^2+\frac{y^4}{4!}m^4-\frac{y^6}{6!}m^6+\frac{y^8}{8!}m^8-\ldots$$

$$(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}m^{2n}+\ldots$$

Sau prescurtat:

$$\sin my=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n m^{2n+1}\cdot\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos my=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n m^{2n}\cdot\frac{y^{2n}}{(2n)!}.$$

IANCULESCU OCTAVIAN
Stud. Şc. Polit. Timişoara.

21. — *Asupra calculului modulului sistemului de logaritmi zecimali.* Am să consider formula:

$$\log(M+k)-\log M=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{2n-1}}{(2n-1)(2M+k)^{2n-1}}$$

simbolul log., însemnând logaritm neperian.

Dacă punem:

$$M=2^\beta,\quad k=\alpha X^p-2^\beta.$$

Cu condiţia: $\alpha>1$,

avem:

$$(1)\quad p\log X+\log\alpha-\beta\log 2=$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha X^p-2^\beta)^{2n-1}}{(2n-1)(\alpha X^p+2^\beta)^{2n-1}}.$$

Dacă însă punem:

$$M=\alpha-1,\quad k=1$$

avem:

$$(2)\quad \log\alpha-\log(\alpha-1)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2\alpha-1)^{2n-1}}$$

Scăzând relaţiunea (2) din (1), avem:

$$(3)\quad p\log X-\beta\log 2+\log(\alpha-1)=2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha X^p-2^\beta)^{2n-1}}{(2n-1)(\alpha X^p+2^\beta)^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2\alpha-1)^{2n-1}}\right]$$

In (3) să punem:

$$\alpha=2^\gamma X^2+1 \quad \text{şi} \quad \log 2=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}},$$

avem deci:

$$(p+q)\log X=2\sum_{n+1}^{\infty}\left[\frac{\beta-\gamma}{(2n-1)3^{2n-1}}+\frac{(\alpha X^p-2^\beta)^{2n-1}}{(2n-1)(\alpha X^p+2^\beta)^{2n-1}}-\frac{1}{(2n-1)(2\alpha-1)^{2n-1}}\right].$$

Dacă facem: $\alpha=2$ şi $q=\gamma=0$, atunci:

$$\log X=\frac{1}{N}=\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\beta-1}{(2n-1)3^{2n-1}}+\frac{(X^p-2^{\beta-1})^{2n-1}}{(2n-1)(X^p+2^{\beta-1})^{2n-1}}\right]$$

Pentru a obţine serii cât mai convergente pentru $\log X$, vom face pe:

$$\frac{X^p-2^{\beta-1}}{X^p+2^{\beta-1}}$$

cât mai mic posibil.

Dacă de exemplu:

$$X=10$$
$$p=10000$$
$$\beta=34582,$$

este destul a lua primul termen din prima serie şi avem:

$$\log 10=\frac{2}{10000}\cdot\frac{34581}{3}=2,\ 31213\ldots$$

deci 5 zecimale exacte.

IANCULESCU OCTVIAN
Stud. Şc. Polit. Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXII, No. 4, Decembrie 1923. Neegalităţi trigonometrice (urmare şi sfârşit), de *I. Ionescu*. Matematicile şi învăţământul secundar, de *Nicolae C. Segârceanu*. Hiperbolele echilatere circumscrise triunghiului şi ortopolul, de *Dumitru Nestor*.

2. *Curierul Matematic*, vol. II, No. 11, Ianuarie 1927. Chestiuni remarcabile din geometria triunghiului, de *N. Botea*. Asupra unor metode matematice în psihologia experimentală, de *N. Segârceanu*.

3. *Lecţiuni de Calcul Diferenţial*, de *Aurel Angelescu*, profesor la facultatea de ştiinţe din *Cluj*. Invingând greutăţile de timp şi muncă, profesorii facultăţii de ştiinţe din Cluj, au hotărît pentru a uşura munca studenţilor, de a tipări cursurile predate. Astfel apare într'un minunat volum *„Lecţiuni de Calcul Diferenţial"*, redactat cu îngrijire şi claritate de d. *A. Angelescu*. Va urma volumul al 2-lea, *„Lecţiuni de Calcul Integral"* de d-l profesor *Gh. Bratu*.

Primul volum tipărit, pe care îl recomandăm călduros studenţilor noştri, cuprinde:

Capitolul I. Mulţimi de numere. Limite. Numere reale Mulţimi. Variabile. Limite. Exerciţii.

Capitolul II. Funcţiuni. Funcţiuni de o variabilă. Funcţiuni de mai multe variabile. Exerciţii.

Capitolul III. Serii. Şiruri. Serii numerice. Serii de funcţiuni. Exerciţii.

Capitolul IV. Derivarea funcţiunilor de o variabilă. Infiniţi mici. Metoda infinitezimală. Derivate şi diferenţiale. Proprietăţile derivatelor. Exercitii.

Capitolul V. Dezvoltarea funcţiunilor. Extreme. Formulele lui *Taylor* şi *Maclaurin*. Valoarea adevărată a expresiunilor nedeterminate. Maximele şi minimele funcţiunilor de o variabilă. Exerciţii.

Capitolul VI. Funcţiuni de mai multe variabile. Derivarea şi diferenţiarea funcţiunilor explicite de mai multe variabile. Funcţiuni implicite. Funcţiuni dependente şi independente. Exerciţii.

Capitolul VII. Extreme. Schimbări de variabile. Extremele funcţiunilor de mai multe variabile. Schimbrea variabilelor. Exerciţii.

PROBLEME REZOLVATE

488. — *Fie* A B C D *un trapez isoscel;* E *intersecţia laturilor neparalele* C B *şi* D A; F *simetricul lui* A *faţă de* E; G *întâlnirea cercului* A F B *cu* D B; I *întâlnirea dreptelor* F G, D C. *Să se arate că patrulaterul* A F C I *este inscriptibil. Când* A *este fix iar* B *se mişcă pe cercul cu centrul în punctul fix* C *şi cu raza* C B, *se cere să se găsească locurile punctelor* D, E, F.

COL. GH. BUICLIU

Trapezul $ABCD$ fiind isoscel, urmează că:

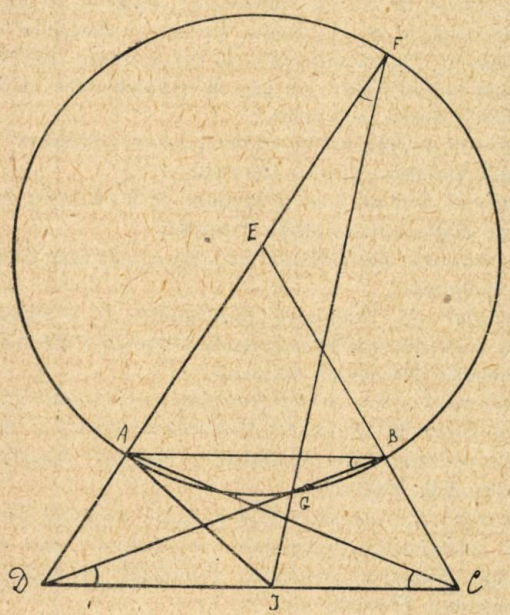
$$AE = EB = EF$$

şi deci triunghiul ABF este dreptunghic în B. Pe figură se vede că:

$$\widehat{ICA} = \widehat{DBA} = \widehat{IFA},$$

care arată că patrulaterul $AFCI$ este inscriptibil.

De oare ce CB şi AD sunt egale urmează că dacă A, C sunt fixe iar CB este constant, atunci punctul D descrie un cerc cu centrul în A şi cu raza BC.



Pentru locul lui E se observă că:

$$EC - EB = EC - EA = CB = \text{const.}$$

Deci E descrie o iperbolă cu focarele în A şi C şi cu axa transversă egală cu BC.

Se deduce imediat că locul lui F este o iperbolă omotetică cu precedenta, centrul de omotetie fiind A iar raportul de omotetie 2.

Notă. 1°. Enunţul iniţial al problemei 488, publicat la pagina 126, vol. V, conţinea unele erori care au fost înlăturate în enunţul ce se publică acum.

2°. Au rezolvat problema foarte bine, observând că enunţul era eronat şi aducând rectificările necesare d-nii: *Ardelea R., Bey Gh., Botea N., Dărmănescu I., Dinescu F., Nestor D., Nicolau-Dobridor I., Sobel M., Stoica A., Tăraş V., Vasiliu Gh. Gh. şi Vlădea I.*

553. — *Dacă $f(x)$ are toate rădăcinele reale, atunci şi ecuaţia:*

$$k^2[f''^2(x)+f'(x)f'''(x)]+k[f(x)f'''(x)+3f'(x)f''(x)] + f(x)f''(x)+f'^2(x)=0,$$

are toate rădăcinele reale.

NICOLAE I. MANOLESCU

Se ştie că dacă $f(x)=0$ are toate rădăcinele reale, atunci şi ecuaţia,

$$f(x)+kf'(x)=0, \tag{1}$$

are toate rădăcinele reale, (C. de P. Cap. XLII, de *A. G. Ioachimescu*). Ecuaţia (1) având toate rădăcinele reale şi ecuaţia derivată, $f'(x)+kf''(x)=0$ are toate radăcinele reale şi atunci evident că ecuaţia:

$$[f(x)+kf'(x)][f'(x)+kf''(x)]=0, \tag{2}$$

ara toate rădăcinele reale.

Derivând ecuaţia (2) căpătăm încă o ecuaţie cu toate rădăcinele reale, anume:

$$[f(x)+kf'(x)][f''(x)+kf'''(x)]+[f'(x)+kf''(x)]^3=0.$$

Desvoltând şi ordonând după puterile lui k obţinem ecuaţia:

$$k^2[f''^2(x)+f'(x)f'''(x)]+k[f(x)f'''(x)+3f'(x)f''(x)] + f(x)f''(x)+f'^2(x)=0,$$

care are toate rădăcinele reale, şi care este tocmai ecuaţia dată.

Soluţie dată de d-nii: *Atanasiu C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Novacu Valeriu* (lic. Arad) şi *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara),

556. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$16\sin^8 2x-\sin 6x=(1-\cos 4x)^4+16\sin^5 2x-3\sin 2x.$$

BARBULESCU TUDOR

Ţinând seamă de relaţiile:

$$1-\cos 4x=2\sin^2 2x$$

$$\sin 6x=3\sin 2x-4\sin^3 2x,$$

ecuația dată, devine :

$$16\sin^8 2x - 3\sin 2x + 4\sin^3 2x = 16\sin^8 2x + 16\sin^5 2x - 3\sin 2x.$$

Simplificând, avem :

$$16\sin^5 2x - 4\sin^3 2x = 0,$$

sau :

$$4\sin^3 2x(4\sin^2 2x - 1) = 0,$$

de unde :

$$\sin^3 2x = 0, \text{ deci, } x = k\pi \text{ sau } x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

și :

$$\sin^2 2x = \frac{1}{4},$$

deci :

$$\sin 2x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 2x = \left(2k \pm \frac{1}{6}\right)\pi \text{ sau } 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

adică :

$$x = \left(k + \frac{1}{12}\right)\pi \quad \text{și} \quad x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pm \pi\frac{\pi}{12}.$$

Soluții date de d-nii : *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Băcanu D. Ion* (lic. Făgăraș), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Carabețeanu Gh. Petru* (lic. Lazăr, București), *Călniceanu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Cocorandu Dan* (Șc. milit. de Geniu), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinu D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Drăgan G.* (Brașov), *Dumitru I. Eugen* (lic. Buzău), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina-Olt), *Duport George* (București), *Fayon Albert* (lic. Lazăr, București), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iacob St. Eugen* (Botoșani), *Iancu D.* (lic. Național, Iași), *Ianculescu Octavian* (Șc. Milit. de Pilotaj și Antrenament), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzești, Craiova), *Iovănescu Felix* (Dolj), *Kindin Simionov* (lic. Tulcea), *Lepădatu I. Miclea* (Găești), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu M. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Morțun Emil* (București), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galați), *Panța Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pascu Sebastian, Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Pavelescu Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Rădulescu C. M.* (lic, R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Segârceanu D, C.* (Craiova), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, București), *Triculescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București), *Vasiliev Ilie* (Tulcea), *Vasilu Gh. Gheorghe* (student), *Vladimirschi V.* (Tighina), *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași), *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Brătianu, Pitești) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău).

564. — *Să se arate că numerele de 4p cifre :*

$$\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{p-q-1}\,9\,\underbrace{00\ldots0}_{2q-1}\,1\,\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1$$

$$\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,6\,\underbrace{00\ldots0}_{p-q-1}\,4\,\underbrace{00\ldots0}_{2q-1}\,1\,\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,6\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1,$$

sunt patrate perfecte.

N. G Botea

Fie N primul număr, putem scri :

$$N = (10^{p-q-1} - 1)10^{3p+q+1} + 4 \cdot 10^{3p+q} + 9 \cdot 10^{2(p+q)} + 10^{2p} + (10^{p-q-1} - 1) \cdot 10^{p+q+1} + 4 \cdot 10^{p+q} + 1 =$$
$$10^{4p} - 10^{3p+q}(10-4) + 9 \cdot 10^{2(p+q)} + 2 \cdot 10^{2p} - 10^{p+q}(10-4) + 1 = 10^{4p} - 6 \cdot 10^{3p+q} - 6 \cdot 10^{p+q} + 2 \cdot 10^{2p} + 9 \cdot 10^{2(p+q)} + 1 = (10^{2p} - 3 \cdot 10^{p+q} + 1)^2$$
$$= \left(\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,7\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1\right)^2.$$

Primul număr este deci un patrat perfect.

Fie P al doilea număr, putem scri :

$$P = (10^{p-q-1} - 1)10^{3p+q+1} + 6 \cdot 10^{3p+q} + 4 \cdot 10^{2(p+q)} + 10^{2p} + (10^{p-q-1} - 1) \cdot 10^{p+q+1} + 6 \cdot 10^{p+q} + 1 =$$
$$10^{4p} - 10^{3p+q}(10-6) + 4 \cdot 10^{2(p+q)} + 2 \cdot 10^{2p} - 10^{p+q}(10-6) + 1 = 10^{4p} - 4 \cdot 10^{3p+q} - 4 \cdot 10^{p+q} + 2 \cdot 10^{2p} + 4 \cdot 10^{2(p+q)} + 1 = (10^{2p} - 2 \cdot 10^{p+q} + 1)^2$$
$$= \left(\underbrace{99\ldots9}_{p-q-1}\,8\,\underbrace{00\ldots0}_{p+q-1}\,1\right)^2.$$

Al 2-lea număr este deci și el un patrat perfect.

Soluții date de d-nii : *Catz Boruh* (lic. Cahul), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzești, Craiova) *Iovănescu Felix* (lic. Carol, Craiova), *Kindin Simionov* (lic. Tulcea), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Ni-*

chita Aurel (lic. Buzeşti, Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Triculescu Ioan* (lic. Buzeşti, Craiova) şi *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iaşi).

566. — *Să se verifice identitatea:*

$$(x+1)^m + C_m^1 (x+1)^{m-1}(x-1) + C_m^2 (x+1)^{m-2}(x-1)^3 + \ldots + C_m^{m-1}(x+1)(x-1)^{m-1} + (x-1)^m = 2^m x^m,$$

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

Dacă în desvoltarea cunoscută a binomului lui *Newton:*

$$(a+b)^m = a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^{m-1} a b^{m-1} + b^m,$$

luăm $a = x+1$, $b = x-1$, deci $a+b = 2x$, avem:

$$2^m x^m = (x+1)^m + C_m^1 (x+1)^{m-1}(x-1) + C_m^2 (x+1)^{m-2}(x-1)^2 + \ldots + C_m^{m-1}(x+1)(x+1)^{m-1} + (x-1)^m,$$

tocmai identitatea dată.

Soluţii date de d-nii: *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Atanasiu C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Carabeţeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Călin M. Gheorghe Călniceanu Gh.* (lic. Timişoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu C. Oprea* (lic. Milit. Cernăuţi), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Florescu C-tin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Victor* (lic. Tg.-Jiu). *Gurău Gh. Almerindo* (Galaţi), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Gabriel Radu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu Felix* (lic. Carol, Craiova), *Kindin P. Simionov* (lic. Tulcea), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Marinescu M. Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Morţun Emil* (Bucureşti), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Nichiţa C. Aurel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iaşi), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. Corneliu* (lic. Caracal), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Rădulescu C. M.* (lic. R.-Sărat), *Robu Ionel* (lic. Braşov), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Şoimulescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iaşi), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (student, Bucureşti), *Vasiliev Ilie, Vasiliu Gh. Gheorghe* (absolvent, Timişoara), *Vâlceanu N. I.* (lic. Tg.-Jiu), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Winkler A. Alfred* (Semin., Pedag., Iaşi), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

Au mai trimes soluţii d-nii: *Pârvănescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stan C.* (lic. Roman).

570.*) — *Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:*

$$\prod\left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right) = \frac{p}{r}(a-b)(b-c)(c-a),$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

ANTOANETA COSTINESCU

In virtutea relaţiilor cunoscute:

$$r = \frac{s}{p},\quad r_c = \frac{s}{p-c},\quad a+b = 2p-c,$$

putem scri:

$$\frac{a^2-b^2}{r+r_c} = \frac{a^2-b^2}{s\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p-c}\right)} = \frac{p(p-c)(a^2-b^2)}{s(2p-c)} = \frac{p(p-c)(a-b)}{s}.$$

De aci rezultă:

$$\prod\left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right) = \frac{p^3(p-c)(p-a)(p-b)(a-b)(b-c)(c-a)}{s^3}$$

Cum:

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),\quad s = pr,$$

urmează că:

$$\prod\left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right) = \frac{p}{r}(a-b)(b-c)(c-a),$$

şi relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Craiu N. Ion* (lic. Piteşti), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gurău Gh. Almerindo* (lic. Galaţi), *Lepădatu I. Miclea* (Găneşti), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iaşi), *Ţanovici V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (absolvent, lic. Timişoara) şi *Wincler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi).

575. — *Să se rezolve în numere întregi şi pozitive, sistemul:*

$$\begin{cases} x+2y+3z = 12 \\ 4x+5y+6z = 30. \end{cases}$$

CORNELIU POPESCU

*) Enunţ rectificat.

Din prima ecuație scoatem:

$$x = 12 - 2y - 3z, \tag{1}$$

și înlocuind în a doua, obținem:

$$48 - 8y - 12z + 5y + 6z = 30$$

sau:

$$3y + 6z = 18,$$

de unde:

$$y = 6 - 2z. \tag{2}$$

De oarece x, y, z sunt întregi și pozitivi, pentru z putem lua numai valorile 0, 1, 2, 3 și atunci din (2) și (1) deducem valorile lui y și x.

Soluțiile sistemului sunt deci:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=6 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=1 \\ y=4 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2 \\ y=2 \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z=3 \\ y=0 \\ x=3. \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Avramescu T. Ion* (lic. Craiova), *Băcanu Ion* (Făgăraș), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Both Ioan* (Gherla), *Bratosin Radu* (lic. Brașov), *Brül Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Busuioc I. Virgil* (lic. Matei Basarab, București), *Carabețeanu Gh. Petru* (lic. Lazăr, București), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Chinie A. Mihail* (lic. Pitești), *Costăchescu V. C.* (lic. milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Ploești), *Dănciulescu Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu V. Oprea* (lic. milit., Cernăuți), *Dimitrescu Sile* (Șc. Polit., Timișoara), *Dimitriu Ioan* (lic. Galați). *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drâmbă N. C-tin* (lic. Galați), *Duport George* (București), *Feldstein N. Solomon* (lic. Pitești), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Goldstein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Grigore Ion* (lic. Pitești), *Gurău Gh. Al.* (Galați), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Koneczny Arthur* (lic. Roman), *Lepădatu Miclea-Găneşti, Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. milit., Iași), *Marinaș B. Marin* (lic. Lazăr, București), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Mura Ștefan* (Arad), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., București), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Nicolau A. Vasile* (lic. Matei-Basarab, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galați), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pascu Sebastian* (lic. Cluj), *Patron Th. N.* (lic. milit., Iași), *Păsăreanu C. Traian* (Craiova), *Prună I. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Rădulescu M.* (lic. R.-Sărat), *Robu Ionel* (lic. Brașov), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Santo Semo* (lic. Silistra), *Secăroiu D-tru, Simionov P. Kindin* (lic. Tulcea), *Șoimulescu I.* (lic. Craiova), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. C-tin* (lic. Roman), *Stănescu A., Stănescu Th.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Triculescu R. Ioan* (lic. Craiova), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Timișoara). *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, București). *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Zaharia Coriolan* (lic. Făgăraș) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Au mai trimes soluții d-nii: *Bălășescu N. C.* (Târgoviște), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași) și *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași).

576. — *Se cere minimul expresiei:*

$$E = x\sqrt{x^2 + y^3},$$

știind că:

$$x^2 y = a \qquad \text{(constant)}$$

BESCHEA NICOLAE

Soluții date de d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (Brașov), *Costâchescu V. C-tin* (lic. Mil., Iași), *Gheorghiu Victor* (lic. Tg.-Jiu), *Iovănescu Felix* (Masna-Dolj), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasilescu Bartolomeu* (București) și *Vâlceanu N. Ion* (Tg.-Jiu).

Minimul lui E, are loc în același timp cu acela a lui:

$$E^2 = x^4 + x^2 y^2.$$

Insă produsul puterilor acestor termeni este constant, căci:

$$x^4 (x^2 y^2)^{\frac{1}{2}} = x^3 y^4 = (x^2 y)^4 = a^4 \qquad \text{(constant)},$$

deci minimul are loc, când:

$$\frac{x^4}{1} = \frac{x^2 y^2}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Atunci, $x^3 y = a$ devine;

$$\frac{y^3}{2} = y, \quad \text{de unde } y = \sqrt[3]{2a},$$

atunci:

$$x = \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt{2}} \sqrt[6]{\frac{a^2}{2}},$$

Rezultă, că:

$$\min. E = \sqrt[6]{\frac{a^2}{2}} \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}} + \sqrt[3]{4a^2}} = \sqrt[9]{\frac{a^4}{4}} \cdot \sqrt{1+2}$$

$$\therefore \quad \min E = \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}.$$

Soluția 2-a, dată de d-nii: *Bratosin Radu* (lic. Brașov), *Busuioc I. Virgil* (lic. Matei-Basarab, București), *Duport George* (București), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Robu Ionel* (lic. Brașov), *Stăncescu* (Ploești), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara). *Vlădea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Zagaican Ilir* (Șc. de Conductori, Chișinău).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași) și *Stan C.* (lic. Roman).

Din relația de condiție deducem:

$$y = \frac{a}{x^2},$$

și introducând în expresia dată, găsim:

$$E = \frac{\sqrt{x^6 + a^2}}{x}$$

Să luăm derivata, avem:

$$E' = \frac{2x^6 - a^2}{x^2\sqrt{x^6 + a^2}}.$$

Anulând derivata și luând numai rădăcina reală și pozitivă, avem:

$$x = \sqrt[6]{\frac{a^2}{2}}.$$

Din tabloul variației:

x	$\cdots$	$\sqrt[6]{\frac{a^2}{2}}$	$\cdots$
E'	$-$	0	$+$
E		$\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}$	

Deci:

$$\min E = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}.$$

Observare. Am presupus variabilele reale și pozitive.

Soluția 3-a dată de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București).

Minimul lui E, are loc în același timp cu minimul lui:

$$E^2 = x^4 + x^2 y.$$

Variabilele x și y satisfăcând condiției:

$$x^2 y = a,$$

putem aplica teorema directa demonstrată în articolul *„Aflarea directă a maximului unui produs și a minimului un i sume"* din R. M. T., vol. IV, pag. 83, în virtutea căruia putem scri:

$$\min E^2 = (\Delta_1 + \Delta_2)\sqrt[\Delta_1+\Delta_2]{a^\Delta \left(\frac{A_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{A_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}},$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_1 = 1,\quad A_2 = 1.$$

Rezultă deci:

$$\min E = \sqrt{(2+4)\sqrt[6]{a^8 \cdot \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4^4}}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}}.$$

581. — *Să se rezolve sistemul:*

$$x^2 + xy - y^2 = 7$$

$$5x^2 + 2xy + 3y^2 = 21.$$

VIRLGILIU C POPESCU.

Inmulțim prima ecuație cu 3 și o scădem din a doua, avem:

$$2x^2 - xy = 0 \quad \text{sau} \quad x(2x - y) = 0,$$

de unde $x = 0$, $y = 2x$.

Inlocuim aceste valori ale lui x și y succesiv în una din ecuațiile sistemului, în prima de exemplu și găsim:

$$y^2 = 7, \quad \text{deci} \quad y = \pm\sqrt{7},$$

și $\quad x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 7, \quad \text{sau} \quad 7x^2 = 7,$

deci:

$$x = \pm 1.$$

Soluțiile sistemului sunt astfel:

$$\begin{cases} x = 0 & x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{7} & y = \pm 2 \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Atanasiu C-tin* (Sc. Polit., Timișoara), *Avramescu T. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Botea G.*

Emil (lic. Cantemir, București), *Both Ioan* (Gherla), *Bratoșin Radu* (lic. Brașov), *Constantinescu Petre* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Costinescu Antoaneta* (Instit. Ortodox, Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Cristescu C. I.* (lic. Șincai, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Dimitrescu Sile* (Șc. Polit, Timișoara), *Dimitriu S. Dinu* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dimitriu A. Ioan* (lic. Galați), *Dohomirescu P.* (lic. Caracal), *Drăgan G.* (Șc. Polit., Timișoara), *Duport George* (București), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Fericeanu Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Grigore Ion* (lic. Pitești), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Imre Macri Șt. fan* (lic. Lazăr, București), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Koneczny Arthur* (lic. Roman), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Mara Ștefan, Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., București), *Nestor D.* (lic. Cantemir, București), *Nicolau A. Vasile* (lic. Matei-Basarab, București), *Niță I. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Nițulescu Gh. Victor* (lic. Caracal), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. milit., Iași), *Păsăreanu C. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu N. Ioan* (student, Cluj), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu St. Toma* (lic. Pitești), *Prună I. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Reiner Gheorghe* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Robu Ionel, Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Săcăroiu D-tru, Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan C. Roman, Stan I. Aurelian* (lic. milit., Iași), *Stănescn Th.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Steblea Ștefan* (Șc. Polit, Timișoara), *Stoica N. Aurelian* (lic. Cantemir, București), *Tomescu Valeriu* (lic, Lazăr, București), *Triculescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vâlceanu N. I.* (lic. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești), *Vasiliu Gh. Gh.* (student), *Vlădea Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Von ca C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia Coriolan* (lic. Făgăraș), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori Chișinău).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Bălășescu N. C.* (Târgoviște), *Dimitrescu Sile* (Șc. Polit., Timișoara), *Pantazi M Alexandru* (lic. Galați), *Părvănescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași) și *Vasilescu Bartolomeu* (București).

588. — *Să se arate că expresia:*

$$49^{8a+1} + 121^{24b+1} + 194^{112c+1} + 1776^{1776d} - 8,$$

este divizibilă cu 11, numerele a, b, c, d fiind întregi și pozitive.

C-TIN V. COSTACHESCU

Insemnând cu E expresia dată, putem scri succesiv:

$$E = (m \cdot 17 - 2)^{8a+1} + (m \cdot 17 + 2)^{24b+1} +$$

$$(m \cdot 17 + 7)^{112c+1} + (m \cdot 17 + 8)^{1776d} - 8 =$$

$$m \cdot 17 + (-2)^{8a+1} + 2^{24b+1} + 7^{112c+1} + 8^{1776d} - 8.$$

Dar observăm că:

$$(-2)^{8a+1} = (2^8)^a \cdot (-2) = m \cdot 17 - 2,$$

$$2^{24a+1} = (2^8)^{3b} \cdot 2 = m \cdot 17 + 2,$$

$$7^{112c+1} = (7^5)^{28c} \cdot 7 = (m \cdot 17 + 4)^{28c} \cdot 7 =$$

$$m \cdot 17 + (4^4)^{7c} \cdot 7 = (m \cdot 17 + 1)^{7c} \cdot 7 = m \cdot 17 + 7$$

$$8^{1776d} = (8^3)^{16 \cdot 37d} = (m \cdot 17 + 2)^{8 \cdot 74} =$$

$$m \cdot 17 + (2^8)^{74d} = m \cdot 17 + 1.$$

Atunci E, devine:

$$E = m \cdot 17 - 2 + 2 + 7 + 1 - 8 = m \cdot 17.$$

Expresia dată este deci divizibilă cu 17.

Soluții date de d-nii: *Bălășescu C. N.* (Târgoviște), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Cristescu C. I.* (lic. Sincai, București), *Dimitriu A. Ion* (lic. Galați), *Dimoviceanu M. D-tru* (Șc. Polit., Timișoara), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Gheorghiu Mihai* (lic. Milit, Craiova), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzești. Craiova), *Marinescu N. Nicolae* (lic, Milit,, Iași), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iași), *Părvănescu I* (lic. Buzești, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr. București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Triculescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău) și *Zănciulescu G. Virgil* (lic. Buzești, Craiova).

Au trimes soluțiii și d-ni: *Băcanu V. Ioan* (Făgăraș) și *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați).

589. — *Să se stabilească identitatea:*

$$n^2 + 8 \sum_{k=1}^{n} (k-1)\left[n^2 - (k-1)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3.$$

V. ALACI

Primul membru se poate scri:

$$n^2 + 8 \sum_{k=1}^{n} (k-1)\left[n^2 - (k-1)^2\right] =$$

$$n^2 + 8n^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) - 8 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3.$$

Dar cunoaștem, că:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Deci:

$$n^2+8\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left[n^2-(k-1)^2\right]=n^2+4n^3(n-1)$$
$$-2n^2(n-1)^2=n^2(1+4n^2-4n-2n^2+$$
$$4n-2)=n^2(2n^2-1.$$

De altă parte este încă cunoscut, că:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=1^3+3^3+5^3+\ldots$$
$$\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

Ambii membrii ai identității fiind astfel egali cu, $n^2(2n^2-1)$, identitatea este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Cernăuți Iosif* (lic. Timișoara), *Crăciunescu Eugen* (lic. Carol, Craiova), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Manolescu I. N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinescu N. Nicolae* (lic. Milit., Iași), *Patron I. N.* (lic. Milit. Iași), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. Ion* lic. Lazăr, București), *Pavel Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (absolvent, Timișoara).

Au trimes soluții și d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan C.* (lic. Roman).

PROBLEME PROPUSE

603. — Numărul N scris în două baze de numerație este reprezentat prin 69 și 96. Care sunt acele baze?

I. PROTOPOPESCU

604. — Să se arate că restul împărțirei lui $N^{5)}$ prin 101 nu poate fi decât -1, 0, sau $+1$.

COL. GH. BUICLIU

605. — Se dă un cerc fix de centru O. Fie A un punct fix pe acest cerc. Prin A ducem o coardă care întâlnește cercul în B și prelungim coarda AB până în C astfel ca s'avem AB = BC. Unim punctul A_1, simetricul lui A în raport cu O, cu C. Perpendiculara pe mijlocul lui OC întâlnește pe A_1C în M. Se cere locul geometric al punctului M, când secanta ABC varie și e tangentă într'un punct oarecare la această curbă.

ȘT. MUSTA

606. — Se dă un cerc și două coarde AB și CD de lungime dată.

1) Să se arate că locul geometric al punctelor M și M' de întâlnire al dreptelor AC cu DB și AD cu BC este un cerc.

2) Să se găsească raza cercului găsit și distanța între cele două centre.

3) Să se determine lungimea coardei CD astfel ca punctele M și M' să fie conjugate cu cercul dat

GH CONSTANTINESCU

607. — Să se dovedească că dacă ecuația:

$$x^2+px+q=0,$$

are toate rădăcinele reale, atunci și ecuația:

$$6x^2+6(2k+p)x+4k^2+6pk+p^2+2q=0,$$

are toate rădăcinele reale, oricare ar fi k real.

V. ALACI

608. — Să se demonstreze că există numere pozitive a, b, c, l așa fel ca relațiile:

$$2(a-b)<l<\frac{c^2+2ab}{2(a+b)},\quad l^2>2\frac{a-b}{a+b}(2ab-c^2),$$
$$c^2=a^2-b^2$$

să fie valabile.

V. VALCOVICI

609. — Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} & \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{b}{\sin\frac{\beta}{2}} & \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}} & \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \\ \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} & \frac{c}{\cos\frac{\gamma}{2}} & \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \end{vmatrix} = 2abc\sqrt{R}\left[\frac{\sqrt{a}(c-b)}{(p-b)(p-c)}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{b}(a-c)}{(p-a)(p-c)}+\frac{\sqrt{c}(b-a)}{(p-a)(p-b)}\right],$$

α, β, γ fiind respectiv unghiurile opuse laturilor a, b, c dintr'un triunghiu.

POPESCU D. STELIAN.

INFORMATIUNI

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

— —

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing.-Şef C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL VI. 15 FEBRUARIE 1927 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 80 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CAHANE ARNO. APLICATIUNI ALE DERIVATELOR.
2. NOTE MATEMATICE, 22, 23.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 559, 563. 582, 586, 587, 590.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procurîna schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 80 lei
Anul III, broşat, 80 lei
Anul IV, broşat, 80 lei
Anul V, broşat, 80 lei.

ANUL VI — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1927.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 80 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

APLICAȚIUNI ALE DERIVATELOR

de CAHANE ARNO

Pentru precizarea celor ce urmează, să considerăm o funcțiune de trei variabile: x, y și z și condiția:

(1) $$x+y+z=k \text{ (constant)}$$

Dacă presupunem pentru moment pe x constant, funcțiunea noastră depinde numai de y și z. Și cum, conform condițiunei (1), putem scrie: $y=k-z-x$ (x presupus constant) adică $y=\varphi(z)$, se vede că funcțiunea considerată a devenit „funcție compusă de z".

Presupunând pe y constant iar pe z și x variabile, cum $z=k-x-y=\psi(x)$ obținem o „funcție compusă de x".

In fine, dacă presupunem pe z constant, cum $x=k-y-z=f(y)$, avem o „funcție compusă de y".

Vreau să arăt că suma derivatelor acestor trei funcțiuni compuse obținute este identic nulă.

Voi nota cu U funcțiunea de x, y, z.

$(U)'_z$, $(U)'_x$, $(U)'_y$ vor fi derivatele celor trei funcțiuni compuse de mai sus; iar cu f'_x, f'_y, f'_z voi nota derivatele parțiale ale funcțiunei U, în raport cu x, y și z.

Trebuie să demonstrăm că:

$$(U)'_x+(U)'_y+(U)'_z\equiv 0.$$

Aplicând formula derivatei unei funcțiuni compuse, avem în cele trei cazuri:

$$(U)'_z=f'_z\cdot z'_z+f'_y\cdot y'_z$$
$$(U)'_x=f'_x\cdot x'_x+f'_z\cdot z'_x$$
$$(U)'_y=f'_y\cdot y'_y+f'_x\cdot x'_x.$$

Insă: $z'_z=1$; $x'_x=1$; $y'_y=1$ iar din: $x=k-y-z$ (z presupus constant) $y=k-z-x$ (x presupus constant) și $z=k-x-y$ (y presupus constant) scoatem:

$$x'_y=-1;\quad y'_z=-1;\quad z'_x=-1.$$

Așa că:

$$(U)'_z=f'_z-f'_y$$
$$(U)'_x=f'_x-f'_z$$
$$(U)'_y=f'_y-f'_x.$$

Și făcând suma, găsim:

(F) $$(U)'_x+(U)'_y+(U)'_z\equiv 0 \qquad \text{Q. E. D}$$

Acestea odată stabilite, să considerăm un triunghiu A B C înscris într'un cerc de rază R, constantă. Luând pentru moment latura a constantă (deci și unghiul A, opus, constant), vârfnl A plimbându-se pe cerc vor varia toate celelalte elemente. Dar $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$ (constant); în ipoteza că A este constant, să luăm derivatele câtorva funcțiuni de A, B, C în raport cu variabila independentă C (cazul $(U)'_z$ de mai sus). Din $B=\pi-A-C$ deducem că derivata lui B în raport cu C este -1. Derivatele lui A și a sunt nule (A și a sunt constante). Din $b=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin B$ scoatem că derivata lui b în raport cu C este: $\frac{a}{\sin A}\cdot(\sin B)'_B\cdot(B)'_C=-\frac{a}{\sin A}\cos B=-2R\cos B$. Din $c=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin C$ deducem că derivata lui c în raport cu C este $\frac{a}{\sin A}\cos C$ sau $2R\cos C$:

Din $p=\frac{a+b+c}{2}$ scoatem:

$$(p)'_c = \frac{0 - \frac{a}{\sin A}\cdot\cos B + \frac{a}{\sin A}\cos C}{2} = \frac{a(\cos C - \cos B)}{2\sin A}$$

sau:

$$(\alpha)\quad (p)'_c = \frac{2a\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}$$

Din $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ scoatem, că derivata lui r în raport cu C este:

$$(\beta)\quad (r)'_C = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot(p-a)' = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}$$

Din h_a (înălțimea unghiului A) $= 2R\sin B\sin C$ scoatem că derivata lui h_a în raport cu C este:

$$2R(\sin B\cos C - \sin C\cos B) = 2R\sin(B-C).$$

Din $S = \frac{a}{2}\cdot h_a$ scoatem că:

$$(\gamma)\quad (S)'_C = \frac{a}{2}\cdot 2R\sin(B-C) = aR\sin(B-C).$$

Cu ajutorul acestor derivate putem găsi nenumărate identități și rezolva numeroase chestiuni, mai ales cele privitoare la maximă și minimă, care se soluționează simplu pe calea derivatelor:

Conform formulei (F) vom avea:

$$(S)'_C + (S)'_B + (S)'_A = 0.$$

Am stabilit că $(S)'_C = aR\sin(B-C)$ și prin analogie $(S)'_B = bR\sin(A-B)$ și $(S)'_A = cR\sin(C-A)$. De unde identitatea:

$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0,$$

demonstrată în F. G. M. 1915, pag. 572.

Conform formulei (F) vom avea: $(r)'_C + (r)'_B + (r)'_A = 0$ de unde, ținând seama de (β), deducem identitatea:

$$\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 0$$

demonstrată în F. G. M. 1915, pag. 572.

Conform formulei (F) vom avea: $(p)'_C + (p)'_B + (p)'_A = 0$. De unde, ținând seama de (α), găsim:

$$\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 0$$

demonstrată în F. G. M. 1915, pag. 572.

In *„Gazeta Matematică"*, XXIX 12, pag. 479, se cere să se demonstreze relațiunea:

$$\frac{a(r_b - r_c)}{r_b + r_c} + \frac{b(r_c - r_a)}{r_c + r_a} + \frac{r(r_a - r_b)}{r_a + r_b} = 0.$$

Această identitate este o aplicațiune a formulei (F), căci cei trei termeni de mai sus sunt derivatele lui $(2r)$ în cele trei cazuri: $(2r)'_C$, $(2r)'_B$ și $(2r)'_A$.

Intr'adevăr:

$$(\beta)\quad \frac{a(r_b - r_c)}{r_b + r_c} = \frac{a\left(r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} - r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\right)}{r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} + r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}} =$$

$$\frac{ar\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)}{r\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)} = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} = (2r)'_C$$

Q. E. D.

Nu vom mai insista în această direcțiune.

Bazând pe adevărul, că două funcțiuni egale au derivatele egale, putem deduce relațiuni noi, interesante.

Spre ex. am găsit că: $(S)'_C = aR\sin(B-C)$. Dar avem formula: $S = \frac{1}{4}(b^2\sin 2C + c^2\sin 2B)$ etc. F. G. M. 1915, pag. 199.

Să presupunem pe A constant și să găsim derivata acestei expresiuni în raport cu C.

$$(S)'_C = \frac{1}{4}\left(2b\frac{-a\cos B}{\sin A}\cdot\sin 2C + 2b^2\cos 2C + 2c\frac{a\cos C}{\sin A}\sin 2B - 2c^2\cos 2B\right).$$

Inlocuind pe $\frac{a}{\sin A}$, în primul termen cu $\frac{b}{\sin B}$, iar în al treilea termen cu $\frac{c}{\sin C}$:

$$(S)'_C = \frac{1}{4}\left(-2b^2\frac{\cos B}{\sin B}\sin 2C + b^2\cos 2C + 2c^2\frac{\cos C}{\sin C}\sin 2B - 2c^2\cos 2B\right).$$

Sau :

$$(S)'_C = \frac{1}{2}\left[b^2\left(\cos 2C - \sin 2C\frac{\cos B}{\sin B}\right) + c^2\left(\sin 2B\frac{\cos C}{\sin C} - \cos 2B\right)\right]$$

$$(S)'_C = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{\sin B}\sin(B-2C) + \frac{c^2}{\sin C}\sin(2B-C)\right]$$

$$(S)'_C = R\left[b\sin(B-2C) + c\sin(2B-C)\right].$$

Şi prin urmare avem relaţiunea :

$$a\sin(B-C) = b\sin(B-2C) + c\sin(2B-C).$$

Se înţelege, că pe această cale, putem deduce nenumărate relaţiuni, aşa că nu voiu mai insista în această direcţiune.

Pentru a se arăta că maximumul lui $x.y.z\ldots$ sau $x^m.y^n.z^p\ldots$, când $x+y+z=k$, are loc pentru $x=y=z$ sau $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$, se întrebuinţează o metodă artificială, scriind produsele sub o formă convenabilă. Aceasta se probează însă în mod natural pe calea derivatelor.

Fie $P = x.y.z$. După cele spuse la început, avem :

$$(P)'_z = x(y-z),\quad (P)'_y = z(x-y),\quad (P)'_x = y(z-x).$$

Produsul P fiind maxim fiecare derivată trebue să fie nulă şi deci $x=y=z$.

Fie $Q = x^m.y^n.z^p$; după cele spuse la început, avem :

$$(Q)'_z = x^m(y^n.p.z^{p-1} - z^p.n.y^{n-1}),$$

$$(Q)'_y = z^p(x^m n.y^{n-1} - y^n.m.x^{m-1}),$$

$$(Q)'_x = y^n(z^p.m\,x^{m-1} - x^m.p.z^{p-1}).$$

Sau :

$$(Q)'_z = p.n.x^m.y^{n-1}.z^{p-1}\left(\frac{y}{n} - \frac{z}{p}\right)$$ etc. Scriind că $(Q)'_z = 0$ etc., deducem :

$$\frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{x}{m}$$ Q. E. D.

Să căutăm, pe calea derivatelor, maximumul expresiunei :

$$E = \sin A\sin B\sin C$$

unde :

$$(\delta)\qquad A+B+C = K \leqslant \pi.$$

$$(E)'_C = \sin A(\sin B\cos C - \sin C\cos B) = \sin A\sin(B-C)$$

$$(E)'_B = \sin C\sin(A-B),\quad (E)'_A = \sin B\sin(C-A).$$

Din cauza lui (δ) $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sunt pozitive, iar derivatele se anulează pentru $A=B=C$ (cu schimbare de semn dela + la —) când are loc maximum lui E.

In acelaş timp deducem identitatea :

$$\sin A\sin(B-C) + \sin B\sin(C-A) + \sin C\sin(A-B) = 0.$$ C. d. P.

Fie încă expresiunea :

$$E = \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$$

unde :

$$(\varepsilon)\qquad A+B+C = K \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$(E)'_C = \operatorname{tg} A\left(\operatorname{tg} B\frac{1}{\cos^2 C} - \operatorname{tg} C\frac{1}{\cos^2 B}\right) = \frac{\operatorname{tg} A}{\cos^2 B\cos^2 C}(\sin B\cos B - \sin C\cos C)$$

$$(E)'_C = \frac{\operatorname{tg} A}{2\cos^2 B\cos^2 C}(\sin 2B - \sin 2C)$$ ţinând seama de $(E)'_B$, de $(E)'_A$ şi de (ε) vedem că E este maximum când $A=B=C$ (F. G, M. 1915, pag. 109),

In „Culegere de probleme“, pag. 396, ex. 43, se cere să se demonstreze inegalitatea :

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Intr'adevăr, voiu arăta că minimum acestei expresiuni are loc pentru $A=B=C=60^0$ când $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Notând cu E această expresiune, avem :

$$(E)'_C = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin C - \sin B}{2}$$

și la fel $(E)'_B = \frac{\sin B - \sin A}{2}$ $(E)'_A = \frac{\sin A - \sin C}{2}$.

Derivatele se anulează pentru $A = B = C$ ($A > B > C$) cu schimbare de semn dela — la +, când are loc minimumul lui E. Q. E. D.

In „Culegere de probleme" se arată că: $\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3}{2}$ (soluția la pag. 503, ex. 15).

Ori aplicând cele spuse rezultatul apare evident ($A = B = C = 60^0$).

Scopul fiind de a arăta unde se aplică cu folos studiul de mai sus, nu voi mai lua exemple de aceiaș natură.

Fie acum următoarea problemă din F. G. M. și C. d. P. (în cazul cel mai general),

1) Din toate triunghiurile înscrise într'un cerc de raza R, care este acela: 1° la care perimetrul este mazimum; 2° suprafața este maximum.

Ca să aflăm maximum lui S scriem că:

$$(S)'_C = 0, \quad (S)'_B = 0, \quad (S)'_A = 0 \qquad \text{adică:}$$

$$aR\sin(B-C)=0, \quad cR(\sin(A-B)=0, \quad bR\sin(C-A)=0$$

de unde $A = B = C$ ($A > B > C$) triunghiul echilateral este cel căutat. Pentru p scriem că $(p)'_C = 0$

$(p)'_B = 0$ $(p)'_A = 0$ sau: $\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} = 0$ etc. de

unde $A = B = C$.

Fie $2p$ perimetrul unui triunghiu, presupunem pe p constant.

Avem: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

In ipoteză că a este constant, avem:

$$2(S)'_c = (b-c)\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Prin urmare avem identitatea:

$$\sum(b-c)\sqrt{\frac{p-a}{(p-b)(p-c)}} \equiv 0.$$

Apoi fiindcă $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

avem și identitatea:

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0.$$

Fie acum problema cunoscută: dintre toate triunghiurile isoperimetrice, care este acela a cărui suprafață este maximă?

Derivatele lui S în cele trei condițiuni ($(u)'_x$, $(u)'_y$ și $(u)'_x$) trebuind să fie nule, găsim că $a = b = c$. Q. E. D. Avem pentru r formula:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

De unde: $(r^2)'_c = \frac{p-a}{p}(b-c)$.

Dar se știe că r_a (raza cerc. ex.) $= \frac{s}{p-a} = \frac{p.r}{p-a}$

De unde: $\frac{p-a}{p} = \frac{r}{r_a}$ Și prin urmare avem identitatea:

$$\frac{b-c}{r_a} + \frac{c-a}{r_b} + \frac{a-b}{r_c} = 0.$$

Se știe că avem: $2R = \frac{abc}{2s}$.

Prin urmare: $(2R)'_c = \frac{2s(abc)'_c - abc(2s)'_c}{4s^2}$.

Dar: $(abc)'_c = a(b-c)$, iar $(2s)'_c$ am găsit că este $(b-c)\cot\frac{A}{2}$,

Prin urmare:

$$(2R)'_c = \frac{2sa(b-c) - abc(b-c)\cot\frac{A}{2}}{4s^2}$$

sau: $(2R)'_c = \frac{(b-c)\left[a.2s - abc\cot\frac{A}{2}\right]}{4s^2}$.

Și înlocuind la numărător pe $2s$ prin $bc\sin A$ avem: $(2R)'_c = \frac{(b-c)abc\left[\sin A - \cot\frac{A}{2}\right]}{4s^2}$

De unde: $\sum(b-c)\left(\sin A - \cot\frac{A}{2}\right) = 0.$

Dar am găsit că: $\sum b-c)\cot\frac{A}{2} = 0.$

Prin urmare:

$$(b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C = 0.$$

NOTE MATEMATICE

22. — *Asupra unei identități cunoscute.* Se cunoaște din calculul algebric identitatea:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Să vedem ce devine această indentitate în calculul vectorial.

Să luăm doi vectori A și B, a căror mărime este a, b, unghiul între ei este γ. Se știe atunci că suma și diferența vectorilor sunt reprezentate în mărime, direcție și senz prin cele două diagonale ale paralelogramului construit pe cei doi vectori.

Dacă facem produsul scalar între acești doi vectori, adică:

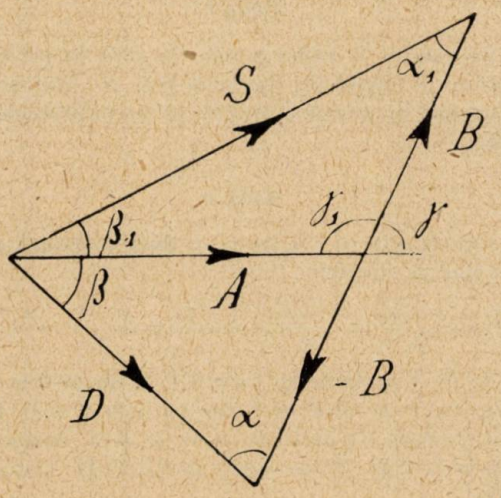
$$m=(A+B).(A-B)=S.D$$

atunci vom putea scrie:

$$m=(A+B).D=A.D+B.D=a\,d\cos\beta+$$
$$b\,d\cos(\pi-\alpha)=d(a\cos\beta-b\cos\alpha)=ds\cos(\beta+\beta_1),$$

sau:

$$m=S(A-B)=S.A-S.B=s\,a\cos\beta_1-s\,b\cos\alpha_1$$
$$=s(a\cos\beta_1-b\cos\alpha_1)=s\,d\cos(\beta+\beta_1),$$



rezultă deci după figură:

$$(A+B).(A-B)=S.D=s\,d\cos(\beta+\beta_1)$$
$$=\frac{s^2+d^2-4b^2}{2}$$

sau fiindcă $s^2+d^2=2(a^2+b^2)$ rezultă:

$$m=0$$
$$(A+B)(A-B)=a^2-b^2$$

Pentru cazul particular când A = B vom avea:

$$(A+B).(A-B)=0,$$

ceiace ne arată că D ⊥ S, după cum se poate verifica pe o figură:

Identitatea cunoscută rămâne deci valabilă.

Dacă facem însă produsul vectorial vom avea ca rezultat un vector:

$$C=[(A+B)(A-B)]=[S.D]$$

adică:

$$C=[A(A-B)]+[B(A-B)]=$$
$$[AA]-[AB]+[BA]-[BB]=-2[AB]$$

putem scrie și:

$$C=[(A+B)D]=[AD]+[BD]=$$
$$=a\,d\sin\beta+b\,d\sin\alpha$$
$$=d(a\sin\beta+b\sin\alpha)=s\,d\sin(\beta+\beta_1$$

sau:

$$C=[S(A-B)]=[SA]-[SB]=$$
$$=s\,a\sin\beta_1-s\,b\sin\alpha_1$$
$$=s(a\sin\beta_1-b\sin\alpha_1)=s\,d\sin(\beta+\beta_1)$$

Dacă Ω este suprafața paralelogramului construit pe cei doi vectori A, B atunci scriem:

$$[AB]=\Omega=a\,b\sin\gamma$$
$$[SD]=2\,\Omega=s\,d\sin(\beta+\beta_1)$$

Și putem verifica că identitatea noastră devine:

$$[(A+B)(A-B)]=-2[AB]$$

căci putem scrie după figură:

$$s\,d\sin(\beta+\beta_1)=2\,a\,d\sin\beta=2\,s\,a\sin\beta_1$$

sau:

$$\frac{s}{\sin\beta}=\frac{d}{\sin\beta_1}=\frac{2a}{\sin(\beta+\beta_1)}$$

ceea ce de altfel se poate constata şi după relaţiile între laturi şi unghiuri căci avem:

$$\frac{a}{\sin\alpha_1}=\frac{b}{\sin\beta_1}=\frac{s}{\sin\gamma_1},\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{d}{\sin\gamma}$$

Produsul [AB] reprezintă momentul vectorului A în raport cu extremitatea lui B, iar [SD] este momentul lui S în raportul cu extremitatea lui D, de aci se poate vedea iarăşi relaţia între suprafeţe.

C. TEODORESCU

23. — In problema No. 532 din *Revista Matematică,* se propune identitatea:

$$\frac{(r-h_a)(r-h_b)}{(r+r_a)(r+r_b)(r-r_c)}+\frac{(r-h_b)(r-h_c)}{(r+r_b)(r+r_c)(r-r_a)}$$
$$+\frac{(r-h_c)(r-h_a)}{(r+r_c)(r+r_a)(r-r_c)}=-\frac{3}{4R}.$$

Imi propun să arăt că această relaţie se poate scrie mai general:

$$\sum\frac{(r-h_a)^n(r-h_b)^n}{(r+r_a)^n(r+r_b)^n(r-r_c)^n}=\mp\frac{3}{4^nR^n}.$$

Intr'adevăr ţinând seama de relaţiile:

$$r=\frac{s}{p},\quad r_a=\frac{s}{(p-a)},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\ \ldots\text{ etc.}$$

$$h_a=\frac{2s}{a},\quad h_b=\frac{2s}{b},\quad h_c=\frac{2s}{c}$$

care ne dau:

$$\therefore\quad A=\frac{(r-h_a)^n(r-h_b)^n}{(r+r_a)^n(r+r_b)^n(r-r_c)^n}=$$

$$\frac{\left(\frac{s}{p}-\frac{2s}{a}\right)^n\left(\frac{s}{p}-\frac{2s}{b}\right)^n}{\left(\frac{s}{p}+\frac{s}{p-a}\right)^n\left(\frac{s}{p}+\frac{s}{p-b}\right)^n\left(\frac{s}{p}-\frac{s}{p-c}\right)^n}$$

$$(1)\qquad A=\mp\frac{s^{2n}\left(\frac{a-2p}{ap}\right)^n\left(\frac{b-2p}{bp}\right)^n}{s^{3n}\frac{(2p-a)^n(2p-b)^nc^n}{p^{3n}(p-a)^n(p-b)^n(p-c)^n}}$$

Semnul dela relaţiunea (1) va fi plus sau minus, după cum va fi valoarea lui n pară sau impară, fiindcă la numitor în (1), apare expresia:

$$(2)\qquad \left(\frac{s}{p}-\frac{s}{p-c}\right)^n=\frac{(-sc)^n}{p^n(p-c)^n}$$

Când vom avea: $n=2p$ relaţia (2) va face ca (1) să aibă semnul plus; când $n=2p+1$, relaţia (1) în virtutea relaţiei (2) va avea semnul minus.

$\therefore$ Simplificând în (1) avem $A=\mp\frac{s^n}{a^nb^nc^n}$ ţinând seamă de relaţia $4^nR^ns^n=a^nb^nc^n$, avem:

$$A=\mp\frac{s^n}{a^nb^nc^n}=\mp\frac{s^n}{4^nR_ns^n}=\mp\frac{1}{4^nR^n}.$$

$$\Sigma=\mp\frac{3}{4^nR^n}\qquad \text{Q. E. D.}$$

GRADIN I. GHEORGHE
Şcoala Politechnică Timişoara

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen parţial de Geometrie analitică

Lucrare scrisă

10 Februarie 1927

Seria I

Se dă punctul M mobil pe axa O_x şi N fix pe axa O_y Se cere locul intersecţiei medianei N H cu înălţimea O I în triunghiul dreptunghic M O N. Să se construiască curba locului.

Seria II

a) Prin punctul (x_0, y_0, z_0) să se ducă o dreaptă care să se sprijine pe dreptele:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1};\quad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}.$$

b) Se dă o parabolă cu focarul F şi directoarea Δ. Un unghiu drept cu vârful în F taie pe Δ în A şi B. Fie M un punct mobil pe parabolă. A M şi B M întâlnesc parabola în C şi D. Să se arate că C, F, D sunt în linie dreaptă.

Seria III

Se dau punctele fixe A şi B şi o dreaptă Δ, care se deplasează paralel cu dânsa. Se descriu cercurile cu centrele în A şi B şi tangente dreptei Δ. Se cere locul punctelor de întâlnire al acestor cercuri.

Seria IV

Fie un punct M pe parabola:

$$y^2 = 2px$$

cu vârful în O. Să se determine M aşa fel în cât cercul de diametru O M să fie tangent la parabolă.

Seria V

Se dă triunghiul cu vârfurile în A $(a, 0)$, B $(0, b)$, C $(c, 0)$. Să se arate că conica:

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy - (a+c)x + \frac{b^2 - ac}{b}y + ac = 0$$

trece prin A, B, C şi că centrul ei descrie cercul:

$$x^2 + y^2 - \frac{a+c}{2}x - \frac{b^2 - ac}{2b}y = 0.$$

Să se demonstreze că acest arc trece prin mijloacele laturilor triunghiului A B C.

Seria VI

Se dă dreapta Δ a cărei ecuaţie este:

$$y = \sin x$$

şi un cerc C. Se cere ecuaţia cercului C′, simetricul lui C faţă de Δ. Să se scrie ecuaţiile cercurilor Γ şi Γ' care trec prin O şi sunt tangente la C şi la C′. Dacă R şi R′ sunt razele cercurilor Γ şi Γ' atunci suma:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

rămâne constantă când m variază.

(Timpul acordat $2^1/_2$ ore pentru fiecare serie.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXII, No. 5, Ianuarie 1927. Curba polară a unei curbe pane. Generalizarea curbei diametrale la curbele strâmbe. Observare asupra ecuaţiei diferenţiale a conicelor, de *Th. Angheluţă.*

2. *Foaia Matematică,* anul III, N-rile 1!—12, Noembrie şi Decembrie 1926. Corespondenţe interesante de colinearitate şi concurenţă, de *Micu Grünbaum.*

Cu această fascicolă, *Foaia Matematică,* anunţă cu părere de rău, suspendarea ei provizorie.

Dorim şi noi s'o vedem apărând cât de curând ca un instrument fertil în ogorul matematic al Ţării noastre, activitatea ei bogată şi plină de laude în decursul celor trei ani de existenţă îndreptându-ne la aceasta.

3. *Curierul Matematic,* vol. II, No. 12, Februarie 1927. O grupă de conice şi pseudoconice într'un triunghiu de *C. I. Bujor.*

4. *P. Sergescu.* Sur les Polygones d'aire maximum inscrits dans l'elipse. (Bulletin de la société des sciences de *Cluj,* 28 Novembre 1926).

PROBLEME REZOLVATE

559, — *Fie* O *şi* O′ *două cercuri tangente exterioare în punctul* A *şi* M A N *o secantă variabilă.*

1°. Se cere locul geometric al conjugatului armonic al punctului M, *în raport cu punctele* A *şi* N, *când punctul* M *se mişcă pe cercul* O.

2°. Să se demonstreze că simetricul punctului M *în raport cu* O O′, *punctul conjugat armonic al punctului* M *în raport cu* A *şi* N *şi proecţia punctului* N *pe* O O *sunt colineare.*

S. M. FELDSTEIN

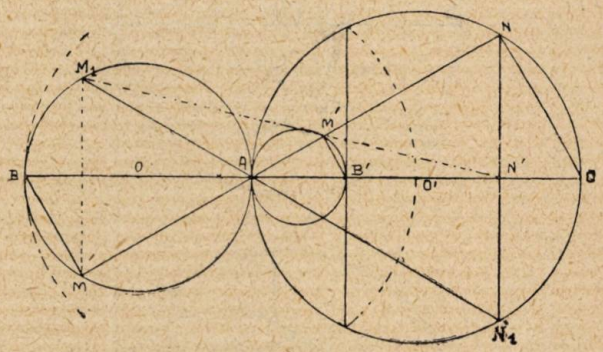
Soluţie geometrică, dată de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic P.-Neamţ), *Antoniu V.* (lic. Cluj), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău).

1°. Fie B şi C respectiv simetricele lui A, în raport cu O şi O′. Observăm că, triunghiurile A M B şi A N C sunt asemenea, deci:

$$\frac{MA}{AN} = \frac{BA}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{MA + AN}{AN} = \frac{BA + AC}{AC}, \qquad \text{sau}$$

$$\frac{MN}{MA} = \frac{BC}{BA} \tag{1}$$



Dacă B′ este conjugatul armonic al punctului B în raport cu punctele A şi C, iar M′ este conjugatul armonic al punctului M în raport cu A şi N, avem ţinând seamă şi de (1):

$$\frac{B'C}{B'A} = -\frac{BC}{BA} = -\frac{MN}{MA} = \frac{M'N}{M'A}.$$

Fiindcă:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{M'N}{M'A},$$

rezultă că în triunghiul A N C, dreapta M′B′ este paralelă cu N C și deci:

$$\widehat{AM'B'} = \widehat{ANC} = 90^0.$$

Punctele A și B′ fiind fixe, locul punctului M′ va fi un cerc cu AB′ ca diametru. Ca să'l construim, vom construi întâi punctul B′.

2°. Fie M_1 și N_1 respectiv, simetricele punctelor M și N în raport cu O O′, iar N′, proecția lui N pe O O′. Din triunghiurile asemenea: M A M_1, N A N_1, avem:

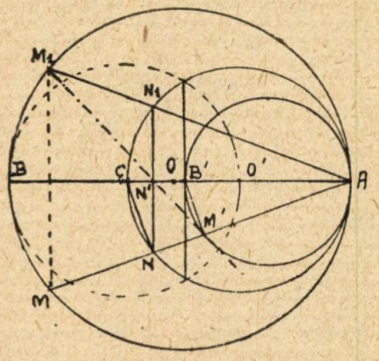
$$\frac{M_1A}{AN_1} = \frac{M'A}{AN}$$

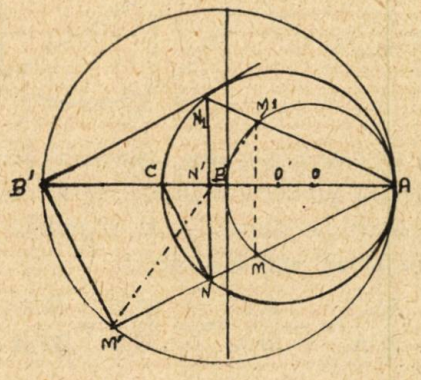
$$\therefore \quad \frac{M_1A + AN_1}{M_1A} = \frac{MA + AN}{MA}, \quad \text{sau}$$

$$\frac{M_1N_1}{M_1A} = \frac{AN}{MA} = -\frac{M_1N}{M'A}, \quad \text{însă} \quad N'N = -N'N_1,$$

deci: $\frac{M_1N_1}{M_1A} \cdot \frac{M'A}{M'N} = -1 = -\frac{N'N_1}{N'N}$, de unde:

$$\frac{M_1N_1}{M_1A} \cdot \frac{M'A}{M'N} \cdot \frac{N'N}{N'N_1} = 1,$$





ceiace arată că punctele M_1, M′, și N′ fiind așezate pe laturile triunghiului A N N, sunt coliniare.

Observare. D-l *Dumitrescu I. Eugen* a observat că, concluziile de mai sus se mențin și în cazul când cercurile sunt tangente interioare, cum se vede din figurile de mai sus.

Soluție analitică dată de d-nii: *Duport George* (București), *Simionov P. Kindin* (lic. Tulcea), *Vasilescu Bartolomeu* (București) și *Vladimirschi Veniamin* (Tighina).

1°. Luăm pe O O′ și perpendiculara pe ea în A, ca axe de coordonate.

Ecuațiile cercurilor O și O′ sunt r, și r_1 fiind razele lor:

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2r_1x = 0.$$

Insemnând cu (λ, μ) coordonatele lui M și:

$$\frac{MA}{MN} = k,$$

deducem că coordonatele lui N sunt:

$$N \begin{cases} x = \dfrac{\lambda(1+k)}{k} \\ y = \dfrac{\mu(1+k)}{k} \end{cases}$$

M′ fiind conjugatul armonic a lui M în raport cu A și N, va avea coordonatele:

$$M' \begin{cases} x = \dfrac{-\lambda(1+k)}{1-k} \\ y = -\dfrac{\mu(1+k)}{1-k} \end{cases}$$

Eliminând cei doi paralimetri variabili, între relațiile

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\lambda(1+k)}{1-k} \\ y = \dfrac{-\mu(1+k)}{1-k} \\ \lambda^2 + \mu^2 - 2r\lambda = 0, \end{cases}$$

M fiind pe cerc obținem:

$$x^2+y^2-2r\frac{k+1}{k-1}x=0.$$

Locul lui M′ este deci un cerc, cu centru pe O O′, trecând prin origină deci tangent lui O, și cu raza:

$$r\frac{k+1}{k-1},\quad \text{unde}\quad k=\frac{r}{r+r_1}.$$

2°. Punctele M_1, M′, N′ sunt coliniare, fiindcă:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\mu & 1 \\ \frac{-\lambda(1+k)}{1-k} & \frac{\mu(1+k)}{1-k} & 1 \\ \frac{\lambda(1+k)}{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda\mu(1-k)}{1+k}$$

$$-\frac{\lambda\mu(1+k)}{k}+\frac{\lambda\mu(1+k)^2}{k(1-k)}-\frac{\mu\lambda(1-k)}{1-k}=$$

$$-\lambda\mu(1+k)\left[\frac{2}{1-k}+\frac{1}{k}-\frac{1+k}{k(1-k)}\right]=0,$$

ceiace trebuie dovedit.

563. — *Se cere patratele perfecte de forma a b c d a.*

NICOLAE I. MANOLESCU

Soluții date de d-nii: *Costăchescu V. C-tin* (lic. milit., Iași), *Dumitrescu I. Eugeniu* (lic. Buzău), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Stan C.* (lic. Roman), *Stan I. Aurelian* (lic. milit., Iași) și *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina).

Cifra *a* nu poate fi evident, decât 1, 4, 5, 6 sau 9.

Dacă $a=1$, atunci însemnând cu N^2, patratul cerut, avem:

$$10001\leqslant N^2\leqslant 19991$$

$$\therefore\quad 101\leqslant N<142.$$

Ca N^2 să se termine cu 1, N trebuie să se termine cu 1 sau 9, deci avem numerile:

$$101^2=10201,\quad 109^2=11881,\quad 111^2=12321,$$

$$119^2=14161,\quad 121^2=14641,\quad 129^2=16641,$$

$$131^2=17161,\quad 139^2=19321,\quad 141^2=19881,$$

adică 9 soluții.

Dacă $a=4$, atunci:

$$40004\leqslant N^2\leqslant 49994$$

$$\therefore\quad 202\leqslant N<224.$$

Ca N^2 să se termine cu 4, N trebuie să se termine cu 2 sau 8, deci avem numerile:

$$202^2=40804,\quad 208^2=43264,\quad 212^2=44944,$$

$$218^2=47524,\quad 222^2=49284,$$

adică 5 soluții.

Dacă $a=5$, atunci:

$$50005\leqslant N^2\leqslant 59995.$$

$$\therefore\quad 225\leqslant N<245.$$

Ca N^3 să se termine cu 5, N trebuie să se termine cu 5, deci avem numerile:

$$225^2=50625\quad \text{și}\quad 235^2=55225,$$

adică 2 soluții.

Dacă $a=6$, atunci:

$$60006\leqslant N^2\leqslant 69996$$

$$\therefore\quad 245\leqslant N<265.$$

Pentru ca N^2 să se termine cu 6, N trebuie să se termine cu 4 sau 6, deci avem numerile:

$$246^2=60516,\quad 254^2=64516,\quad 256^2=65536,$$

$$264^2=69696,$$

adică 4 soluții.

In fine dacă $a=9$, atunci:

$$90009\leqslant N^2\leqslant 99999$$

$$\therefore\quad 303\leqslant N<317.$$

Pentru ca N^2 să se termine cu 9, N trebuie să se termine cu 3 sau 7, deci avem numerile:

$$303^2=91809,\quad 307^2=94249,\quad 313^2=97969,$$

adică 3 soluții.

In total avem deci 23 de soluții.

Au dat soluții, făcând mai multe încercări, d-nii: *Avramescu T. Ion* (Craiova), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bălășescu C. N.* (Târgovite), *Both Ioan* (Gherla), *Cercel St. C.* (lic. Târgoviște), *Craiu N. Ioan* (lic. Pitești), *Dobrescu Ana* (București), *Duport George* (București), *Georgescu S. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Iovănescu Felix* (Craiova), *Mătăsaru C. Traian*, *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Podariu Alexandru* (lic. P.-

Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul. București), *Stoicescu Th.* (lic. Internat, Iași), *Țanovici C. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu Bartolomeu* (student, București) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

582. — *Să se verifice formula:*

$$C_m^{n-1} C_p^1 + 2 C_m^{n-2} C_p^2 + 3 C_m^{n-3} C_p^3 + \ldots$$
$$\ldots + i C_m^{n-i} C_p^i + \ldots + n C_m^0 C_p^n = \frac{np}{m+p} C_{m+p}^n.$$

ȘT. MUSTA

Considerăm desvoltările:

$$(1) \quad (1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_m^n x^n + \ldots + C_m^m x^m,$$

$$(2) \quad (1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \ldots + C_p^n x^n + \ldots + C_p^p x^p$$

Derivând relația (2), avem:

$$(3) \quad p(1+x)^{p-1} = C_p^1 + 2 C_p^2 x + 3 C_p^3 x^2 + \ldots$$
$$(n-1) C_p^{n-1} x^{n-2} + \ldots + n C_p^n x^{n-1} + \ldots + p C_p^p x^{p-1}$$

Inmulțind relațiile (1) și (3), și scriind că coeficienții lui x^{n-1} din ambii membrii sunt egali, obținem:

$$p C_{m+p-1}^{n-1} = C_p^1 C_m^{n-1} + 2 C_p^2 C_m^{n-2} + 3 C_p^3 C_m^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (n-1) C_p^{n-1} C_m^1 + n C_p^n C_m^0.$$

Primul membru, se vede ușor că'l putem scrie încă:

$$p C_{m+p-1}^{n-1} = \frac{pn}{(m+p)} \cdot$$
$$\frac{(m+p)(m+p-1)\ldots(m+p-n+1)}{n!} = \frac{pn}{m+p} C_{m+p}^n.$$

Formula dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

Altă soluție. Luăm termenul general, pe care îl desvoltăm și obținem:

$$i C_m^{n-i} C_p^i = \frac{i \cdot p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} C_m^{n-i}$$
$$= p C_m^{n-i} C_{p-1}^{i-1}.$$

Dând lui i valorile 1, 2, 3, ... n și adunând avem:

$$C_m^{n-1} C_p^1 + 2 C_m^{n-2} C_p^2 + 3 C_m^{n-3} C_p^3 + \ldots$$
$$\ldots + i C_m^{n-i} C_p^i + \ldots + n C_m^0 C_p^n = p(C_m^{n-1} C_{p-1}^0 +$$
$$C_n^{n-2} C_{p-1}^1 + \ldots + C_m^{n-i} C_{p-1}^{i-1} + \ldots + C_m^0 C_p^{n-1})$$
$$= p C_{m+p-1}^{n-1} = \frac{np}{m+p} C_{m-p}^n.$$

Formula este astfel verificată.

Soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești. Craiova), *Dumitrescu I. Eugen* (lic. Buzău), *Florescu Th. C-tin* (lic. Buzești, Craiova), *Nichita Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galați), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București) și *Triculescu Ioan* (lic. Lazăr. București).

586. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\cos^m \alpha = \frac{1}{2^m} \sec m\alpha \left[1 + C_m^1 \cos 2\alpha + C_m^2 \cos 4\alpha + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + C_m^{m-1} \cos 2(m-1)\alpha + \cos 2m\alpha\right] =$$
$$\frac{1}{2^m} \operatorname{cosec} m\alpha \left[C_m^1 \sin 2\alpha + C_m^2 \sin 4\alpha + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + C_m^{m-1} \sin 2(m-1)\alpha + \sin 2m\alpha\right].$$

ALFRED A. WINKLER.

Pornim dela formula cunoscută:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$
$$\therefore \quad 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

Adunăm în ambii membrii $i \sin 2\alpha$, $(i = \sqrt{-1})$, avem:

$$2\cos^2 \alpha + i \sin 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha,$$

sau:

$$2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Ridicăm acum la puterea m^a, folosind formula lui *Moivre*, avem:

$$2^m \cos^m \alpha(\cos m\alpha + i \sin m\alpha) = (1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^m$$
$$= 1 + C_m^1(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + C_m^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^2 +$$
$$\ldots + C_m^{m-1}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^{m-1} + (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^m.$$

Ținând iarăși seamă de formula lui *Moivre*, putem scri încă:

$$2^m \cos^m \alpha (\cos m\alpha + i \sin m\alpha) =$$
$$1 + [C_m^1 \cos 2\alpha + C_m^2 \cos 4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-1} \cos 2(m-1)\alpha + \cos 2m\alpha] +$$
$$i[C_m^1 \sin 2\alpha + C_m^2 \sin 4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-1} \sin 2(m-1)\alpha + \sin 2m\alpha].$$

Egalând părțile reale și cele imaginare, deducem ușor:

$$\cos^m \alpha = \frac{1}{2^m} \sec m\alpha [1 + C_m^1 \cos 2\alpha + C_m^2 \cos 4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-1} \cos 2(m-1)\alpha + \cos 2m\alpha] =$$
$$\frac{1}{2^m} \operatorname{cosec} m\alpha [C_m^1 \sin 2\alpha + C_m^2 \sin 4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-1} \sin 2(m-1)\alpha + \sin 2m\alpha],$$

adică tocmai dubla identitate dată.

Soluții date de d-nii: *Atanasiu C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Manolescu I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (llc. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț) și *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București).

587. — *Să se găsească patratele perfecte de forma a b b c unde a și c sunt cifre consecutive.*

EUG. ST. IACOB

Știm că ultimele două cifre ale unui patrat perfect sunt: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, (C. de P. Arit., Cap. XXXIX).

Așa dar numerile de forma *a b b c* în condițiile problemei ar putea fi:

1000, 2001, 3004, 5004, 8009, 5116, 7116, 2221, 3224, 5224, 4225, 6225, 8229, 5336, 7336, 2441, 3444, 5444, 8449, 5556, 7556. 2661, 3664, 5664, 8669, 5776, 7776, 2881, 3884, 5884, 8889. 5996, 7996.

Dintre acestea, numerile: 2001, 7116. 6225, 8229, 3444, 5556, 2661, 5664, 8889, nu sunt patrate perfecte, fiind divizibile cu 3 fără a fi și divizibile cu 9.

Dintre numerile rămase constatăm că numai 4225 și 5776 sunt patrate perfecte:

$$4225 = 65^2, \quad 5776 = 76^2,$$

care sunt soluțiile problemei.

Soluții date de d-nii: *Avramescu Th. Ion* (lic. Craiova), *Băcanu V. Ion* (Făgăraș), *Bălășescu C. N.* (Târgoviște), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Bratoșin Radu* (lic. Brașov), *Catz Boruh* (lic. Cahul), *Costăchescn V. C.* (lic. milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Cristescu C. I.* (lic. Șincai, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dimoviceauu M. D-tru* (Șc. Polit., Timișoara), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Gh. Mihai* (lic. milit., Craiova), *Gheorghiu A.* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Goldsteln Alois* (lic. Mihai-Viteazul București), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Iovănescu Dan* (lic. Carol, Craiova), *Iovănescu D-tru* (lic. Buzești, Craiova), *Marinescu N. Nicolae* (lic. milit., Iași), *Muster H. D-tru* (Semin. Pedag., București), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nichita C. Aurel* (lic. Buzești, Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. milit., Iași), *Pavel H. Nicol e* (lic. Carol, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popa Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgoviște), *Popescu Șt. Toma* (lic. Pitești), *Rainer Gheorghe* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sabetay Andrei* (lic. T.-Severin), *Savin Ioan* (lic. milit, Iași), *Secăroiu D-tru* (Brașov), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aureliau* (lic. Milit., Iași), *Sto ca N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Triculescu Ioan* (lic. Buzești, Craiova), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Gh. Gheorghe* (Timișoara), *Vâlceanu N. I.* (lic. Tg.-Jiu), *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori Chișinău) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

590* — *Să se găsească soluțiile întregi ale ecuației:*

$$72 z^2 = 4x^2 + 9y^2.$$

GH. CONSTANTINESCU

Soluție dată de d-l *Gheorghiu Th. Gheorghe.*

Împărțind ecuația dată cu 4, avem:

$$(1) \qquad 18 z^2 = x^2 + 9\left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

Rezultă că y e forma:

$$(2) \qquad y = 2u \quad (u \text{ întreg})$$

și (1) devine împărțind cu 9:

$$(3) \qquad 2 z^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 9u^2,$$

de unde rezultă că:

$$(4) \qquad x = 3v, \quad (v \text{ întreg}).$$

Ecuația (3) devine astfel:

$$2 z^2 = u^2 + v^2$$
$$\therefore \quad z^2 = \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} = 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{2}\right)^2.$$

Ținând seamă de identitatea:

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2+2\beta^2,$$

putem scri încă:

$$z^2=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2,$$

care este o ecuație *pitagorică* și poate fi rezolvată (G. M., vol. XXX, *„Asupra ecuației pitagorice"*).

Soluțiile fupdamentale sunt de forma:

$$(4)\quad z=p^2+q^2,\quad \frac{u+v}{2}=2pq,\quad \frac{u-v}{2}=p^2+q^2,$$

unde p și q sunt numere întregi.

Din (4) deducem:

$$z=p^2+q^2,\quad u=2pq+p^2-q^2,\quad v=2pq-p^2+q^2.$$

Atunci ținând seamă de relațiile (2) și (4), găsim că soluțiile întregi ale ecuației date sunt de forma:

$$z=p^2+q^2,\quad x=3(2pq+p^2-q^2,$$
$$v=2(2pq-p^2+q^2$$

unde lui p și q putem da orice valori întregi.

Evident că mai general putem lua:

$$z=\pm(p^2+q^2),\quad x=\pm 3(2pq+p^2+q^2),$$
$$v=\pm 2(2pq-p^2+q^2).$$

Exemplu. Dacă luăm:

$$p=3,\quad q=2,$$

găsim:

$$x=\pm 51,\quad y=\pm 14,\quad z=\pm 13.$$

Soluții parțiale, date de d-nii: *Băcanu V. Ion* (Făgăraș) *Bălășescu N. C.* (Târgoviște), *Botea G. Emil* (lic. Cantemir, București), *Costăchescu V. C-tin* (lic. milit., Iași), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Franțiu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu Haralambie* (Pitești), *Marinescu N. Nicolae* (lic. milit., Iași), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacn Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Patron Th. N.* (lic. milit., Iași), *Pârvănescu I.* (lic. Buzești, Craiova), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgoviște), *Stan I. Aurelian* (lic. milit,, Iași), *Stan C.* (lic. Roman), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești) și *Zagaican Ilie* (Șc. de Conductori, Chișinău).

PROBLEME PROPUSE

610. — Să se arate că expresiunea:

$$E=2^{101}+3^{101}+4^{101}+6^{101}$$

se divide prin 5.

STELIAN D. POPESCU

611. — Să se găsească un număr de două cifre știind că dacă după el se scrie numărul ce se obține din el sporindu-i toate cifrele cu 1, se obține un cub.

COL. GH. BUICLIU

612. — Pe o dreaptă dată se iau patru puncte A, B, C și D și se unesc aceste puncte cu un punct M din plan.

1°. Să se afle locul geometric al punctelor M astfel ca bisectoarele unghiurilor AMB și CMD să fie perpendiculare.

2°. Să se construiască locul găsit.

GH. CONSTANTINESCU

613. — In cercul O se duc diametral AB și coardele AC și BD care se taie în E. Se duce cercul CED cu centrul O'. OO' taie cercurile O și O' în F și G și pe DC în H. O'E taie pe AB în I. Să se arate că:

1°. EI este perpendiculară pe AB.

2°. Pentagonul OIDO'C este inscriptibil.

3°. $O'H\cdot\overline{OF}^2=OH\cdot\overline{O'G}^2$.

LEPADATU I. MICLEA.

614. — Să se rezolve inegalitatea:

$$\frac{3x^2+x-2}{3x-2}<\frac{3+7x-3x^2-2x^3}{2x^2(2x-3)}.$$

GHEORGHE TH. GHEORGHIU

615. — Să se afle limita expresiei:

$$E=\frac{x+\sin x-\operatorname{tg} y}{y-\sin x+\operatorname{tg} x},$$

pentru $x=y=0$, soluțiuni ale ecuației:

$$e^x+\operatorname{tg} y-e^y=0.$$

V. ALACI

616. — Să se rezolve ecuația în α:

$$c^2\cos 2\alpha+2l(a+b)\cos\alpha+2ab=0,$$

și să se discute valorile relațiilor găsite, presupunând că mărimele a, b, c și l sunt pozitive.

V. VALCOVICI

INFORMATIUNI

Concursul Revistei Matematice din Timişoara, a întrunit până acum pe următorii corespondenţi: In dreptul fiecăruia s'a trecut numărul problemelor rezolvate şi publicate în numerile 1, 2, 3, 4, 5 ale revistei şi numărul de puncte întrunite.

Cl. V

1. Râmniceanu I. Cristian (lic. milit., Iaşi).
2. Savin Ioan (lic. milit,. Iaşi).
3. Solniţaru V. Longin (lic. Piteşti).

Cl. VI.

1. Botea G. Emil (lic. Cantemir, Bucureşti).
2. Costăchescu V. C-tin (lic. milit., Iaşi): 438, 521, 525, 536, 539, *5 puncte.*
3. Dănciulescu Gr. Virgiliu (lic. Buzeşti, Craiova).
4. Iancu H. David (lic. Naţional, Iaşi), 505, 438, 456, *3 puncte.*
5. Stan I. Aurelian (lic. milit., Iaşi): 525, *1 punct.*

Cl. VII.

1. Gheorghiu Th. Gh. (lic. Galaţi): 505. 523, 438. 521 536. 405, *6 puncte.*
2. Marinescu N. Nic. (lic. milit. Iaşi).
3. Nestor D. (lic. Cantemir, Bucureşti): 491, 499, 501, 506, 314, 412, 420, 495, 504, 505, 346, 438, 510, 521, 536, 539, 397, 405, *18 puncte.*
4. Panţu Z. Ion (lic. Lazăr, Bucureşti): 499, 500, 505, 438, 510, 521, 536, 539, *8 puncte.*
5. Patron Th. N. (lic. milit., Iaşi): 590, *1 punct.*
6. Popescu D. Stelian (lic. Lazăr, Bucureşti): 505, 432, 523, 438, 510, 521, 525, 536, *8 puncte.*
7. Roman I. Ioan (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti): 348, 328, 438, 521, 536, 405, *6 puncte.*
8. Zamfirescu Gh. Ioan (lic. Piteşti): 499, 420, 505, 438, 521, 536, 539, 397, 405, 447, *10 puncte.*

Cl. VIII.

1. Novacu Valeriu (lic. Arad): 499, 500, 348, 412, 505, 219, 328, 523, 521, 536, 539, 405, 456, *13 puncte.*
2. Podariu Alex. (lic. P.-Neamţ): 499, 500, 348, 412, 495, 505, 328, 338, 438, 510, 521, 525, 536, 539, 405, 447, 456, *17 puncte.*
3. Stoica N. Aureliu (lic. Cantemir, Bucureşti): 491, 499, 500, 501. 506. 348, 412, 495, 504, 505, 328, 436, 438, 510. 521, 539, 405, 456, 461, *19 puncte.*

Legându-se colecţia R. M. T., anul V, în volum, şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V cu preţul de lei 80 volumul şi se trimete la cerere.

— —

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzători e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pentru anul 1927 este

100 (una sută) lei

şi se trimete prin mandat poştal la administraţia revistei.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

Lalescu Tr.	Diviziunea polinoamelor . . .	4
Crăciunescu S.	Patrulater cu laturile tangente la cerc	19
Botea G. N.	Generalizarea teoremei lui Aubert	35
Grünbaum Micu	Teoreme remarcabile din geometria triunghiului	51
***	Recreații matematice	56
Zapan Gh.	O teoremă de aritmetică . . .	67
Popovici Tib.	Generalizarea unei proprietăți a seriei lui „e“	83
Nestor D.	Asupra unei generalizări a teoremei lui Aubert	99
***	Concurs	101
Gradin I. Gh.	Asupra unor clase de identități trigonometrice	115
Moisil C. Gr.	Câteva însumări algebrice . .	131
Manolescu I. N.	Generalizarea unor identități trigonometrice	147
Protopopescu Ion	Asupra neegalităților trigonometrice	163
Kahane Arno	Aplicațiuni ale derivatelor . .	179

NOTE MATEMATICE

Teodorescu N.	Generalizarea problemei 492 .	6
Botea G. N.	Generalizarea problemei 492 .	6
Alaci V.	Asupra problemei 492	23
Stoenescu Al. I.	Determinarea unui polinom $f(x)$	23
Buicliu Gh., Col.	Problema 420	37
Nestor D.	Asupra notei 9 din R. M. T., V, p. 84	37
Buicliu Gh., Col.	Generalizarea problemei 346 .	55
Alaci V.	Asupra problemei 523 R. M. T. VI	56
Dumitrescu Gh. M.	Asupra unor relațiuni	70
Alaci V.	Asupra problemei 461	85
Nestor D.	Generalizarea unor identități .	85
Teodorescu C.	Suma unei progresii aritmetice	101
Ionescu Bujor Th. C.	Asupra notei 19, R. M. T., IV	101
V. A.	Condițiile ca n ecuații de gradul n să aibă o rădăcină comună	102
Angelescu N. Tr.	Generalizarea problemei 239 .	119
Rădulescu Mihail	Asupra unei chestiuni de maxim	120
Weiss Leon	Desvoltarea unui determinant .	133
Agronomof N.	Notes diverses sur la géométrie du triangle	150
Ianculescu Oct.	Desvoltarea în serie a funcțiunilor $\sin my$, $\cos my$ . . .	166
Ianculescu Oct.	Asupra calculului modulului sistemului de logaritmi zecimali	166
Teodorescu C.	Asupra unei identități cunoscute	183
Gradin I. Gheorghe	Asupra problemei 532, R. M. T.	184

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică,	7, 24, 38, 57, 71, 87, 103, 120, 135, 153, 167.
Foaia Matematică,	7, 24, 103, 135.
Curierul Matematic,	7, 24, 38, 71, 103, 120, 135, 167.
Revista Matematică Bârlădeană	7, 38.
Buletinul Societății Studenților în Matematici,	. . 24
Ziarul Matematic,	24, 57, 71.
N. Nicolescu,	Sur une classe de séries dont le cercle de convergence est une ligne singulière essentielle . 24
Vrânceanu G.	Sulla integratione del problema dei due corpi 24
Condiescu P. I.	Doctrina administrativă . . . 24
Revista de Ciencias	38, 57, 153.
Vrânceanu G.	Sopra una classe di sistemi anolonomi 71
Vrânceanu G.	Sul teorema di Dirichlet . . . 71
Abramescu N.,	Introducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene . . . . . , 87
Sergesco P.	Quelques remarques sur les courbes unicursales 87
Sergesco P.	Sur la résolution d'une équation 87
Mureșeanu C.	Educația mulțimilor prin școala creatoare. 87
Garcia G.	La teoria de la Relatividad . . 104
Angheluță Th.	Sur une équation au différences finies 104
Angheluță Th.	Intégration d'une classe d'équations linéaires aux différences finies 104

Angheluță Th. Une remarque sur l'intégrale de Poisson 104
Grünbaum M. Contribuții la geometria triunghiului 104
Gheorghiu Șerban Essai sur les finances d'après guerre de la Roumanie . . 104
Manicatide Al. Algebra cl. II reală 112
Angelescu A. Lecțiuni de calcul diferențial . 167
Sergescu P. Sur les Polygones d'aire maximum inscrits dans l'ellipse . 185

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examenul de admitere în anul I 135
Examen parțial de Geometrie analitică 184

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă în anul respectiv, al doilea număr indică pagina din acest volum unde a fost rezolvată, N indică problemele nerezolvate.

DIN ANUL I

42, 94, N;
50, 110, N;
54, 126, N;
69, 142, N;
91, 187, N;
92, 187, N;
98, 187, N;
99, 187, N;
100, 187, N.

DIN ANUL II

109, 14, N;
110, 14, N;
114, 30, N;
120, 30, N;
124, 30, N;
140, 62, N;
141, 62, N;
142, 77, N;
150, 78, N;
154, 78, N;
156, 94, N;
157, 94, N;
161, 94, N;
162, 94, N;
163, 94, N;
164, 94, N;
165, 94, N;
173, 110, N;
174, 110, N;
175, 110, N;
176, 126, N;
178, 126, N;
180, 126, N;
184, 126, N;
185, 126, N;
186, 142, N;
191, 142, N;
194, 142, N;
195, 142, N;
197, 158, N;
198, 158, N;
199, 158, N;
205, 174, N;
206, 174, N;
207, 174, N;
208, 174, N;
212, 174, N;
213, 174, N;
214, 185, N;
217, 185, N;
219, 185, 38 VI.

DIN ANUL III

230, 14, N;
233, 30, 104 VI;
235, 30, N;
243, 46, N;
244, 46, N;
245, 46, 105 VI;
248, 46, N;
253, 62, N;
254, 62, 106 VI;
255, 62, N;
256, 62, 106 VI;
259, 62, N;
264, 78, N;
268, 78, N;
275, 94, N;
289, 126, N;
291, 126, N;
296, 142, N;
299, 142, N;
304, 158, N;
305, 158, N;
307, 158, N;
310, 174, N;
313, 174, N;
314, 174, 24 VI;
315, 174, N;
317, 174, N;
318, 185, N;
319, 185, N;
323, 185, N.

DIN ANUL IV

328, 14, 39 VI;
329, 14, N;
331, 14, N;
334, 14, N;
335, 14, N;
336, 14, N;
338, 30, 40 VI;
343, 30, N;
344, 30, N;
345, 30, N;
346, 46, 41 VI;
347, 46, N;
348, 46, 25 VI;
357, 62, N;
359, 62, N;
361, 78, N;
369, 94, N;
374, 94, 57 VI;
376, 94, N;
381, 110, 71 VI;
382, 110, N;
388, 126, 153 VI;
389, 126, 72 VI;
390, 126, N;
393, 126, N;
397, 142, 74 VI;
401, 158, N;
405, 158, 75 VI;
406, 158, N;
407, 158, N;
411, 158, N;
412, 174, 26 VI;
413, 174, N;
414, 174, N;
415, 174, N;
418, 174, N;
420, 191, 91 V, 26 VI;
421, 191, N;
423, 191, N;
424, 191, N;
427, 191, 27 VI;
428, 191, 42 VI.

DIN ANUL V

432, 13, 45 VI;
435, 13, N;
436, 13, 58 VI;
438, 30, 59 VI;
440, 30, N;
441, 30, N;
442, 30, N;
443, 30, N;
444, 30, N;
445, 46, N;
447, 46, 76 VI;
448, 46, N;
449, 46, N;

450, 46, N;
453, 46, 87 VI;
456, 62, 77 VI;
457, 62, 88 VI;
458, 62, N;
459, 62, 89 VI;
460, 62, N;
461, 62, 77 VI;
462, 62, N;
464, 78, N;
465, 78, 90 VI;
466, 78, 135 VI;
469, 78, 92 VI;
473, 94, N;
474, 94, N;
475, 94, N;
476, 94, 91 VI;
478, 94, N;
479, 94, N;
481, 110, 190 N;
485, 110, N;
488, 126, 167 VI;
489, 126, N;
491, 126, 7 VI;
494, 126, N;
495, 142, 27 VI;
496, 142, 91 VI;
497, 142, 137 VI;
499, 142, 8 VI;
500, 142, 9 VI;
501, 142, 10 VI;
502, 142, N;
504, 158, 28 VI;
505, 159, 29 VI;
506, 159, 11 VI;
507, 159, N;
508, 159, N;
509, 159, N;
510, 159, 59 VI;
511, 159, 107, VI;
512, 174, N;
513, 174, 93 VI;
514, 174, N;
516, 174, N;
517, 174, 108 VI:
518, 190, N;
519, 190, N;
520, 190, 139 VI;
521, 190, 60 VI;
522, 190, 109 VI;
523, 190, 45 VI;
524, 190, N.

DIN ANUL VI

525, 14, 60;
526, 14, N;
527, 14, N;
528, 14, N;
529, 14, 154;
530, 14, 121;
531, 14, N;
532, 14, 109;
533, 30, N;
534, 30, N;
535, 30, N;
536, 30, 61;
537, 30, N;
538, 30, 121;
539, 30, 61;
540, 46, N;
541, 46, N;
542, 46, N;
543, 46, N;
544, 46, N;
545, 46, 141;
546, 46, 155;
547, 46, 123;
548, 46, N;
549, 62, N;
550, 62, N;
551, 62, N;
552, 62, 124;
553, 62, 168;
554, 62, 124;
555, 62, 124;
556, 62, 168;
557, 78, N;
558, 78, N;
559, 78, 185;
560, 78, 156;
561, 78, 156;
562, 78, N;
563, 94, 187;
564, 94, 169;
565, 94, N;
566, 94, 170;
567, 94, N;
568, 94, N;
569, 94, N;
570, 94, 170;
571, 110, 157;
572, 110, N;
573, 110, N;
574, 110, N;
575, 110, 170;
576, 110, 171;
577, 110, N;
578, 110, N;
579, 126, N;
580, 126, N;
581, 126, 172;
582, 126, 188;
583, 126, N;
584, 126, N;
585, 126, N;
586, 126, 188;
587, 142, 189;
588, 142, 173;
589, 142, 173;
590, 142, N;
591, 142, 189;
592, 142, N;
593, 142, N;
594, 142, N;
595, 158, N;
596, 158, N;
597, 158, N;
598, 158, N;
599, 158, N;
600, 158, N;
601, 158, N;
602, 158, N;
603, 174, N;
604, 174, N;
605, 174, N;
606, 174, N;
607, 174, N;
608, 174, N;
609, 174, N;
610, 190, N;
611, 190, N;
612, 190, N;
613, 190, N;
614, 190, N;
615, 190, N;
616, 190, N.

TABLOUL NUMELOR

Abason E., 2.
Abramescu N., 2, 24, 57, 87, 121.
Ackerman Casimir, 40, 59, 60, 61, 62, 77, 92, 94, 110, 121, 122, 123, 155, 156.
Adam Eugen, 27.
Adam Mircea, 39, 104.
Adam D. Romeo, 2.
Adamescu Maxim, 2.
Agapescu Nic., 25, 29, 75, 89, 138.
Agarici Gr. Dum., 46.
Agronomof N., 152.
Alaci V., 2, 3, 10, 14, 18, 24, 30, 34, 37, 46, 50, 57, 60, 62, 66, 77, 78, 82, 85, 94, 98, 106, 110, 114, 125, 126, 130, 142, 146, 154, 156, 158, 162, 173, 190.
Albeață Ermil, 29, 99, 110, 120, 122, 123, 124, 125, 155, 156, 157, 169, 171, 172.
d'Albon André, 61, 62, 110.
Albulescu I. Ion, 75.
Alexandrescu El., 2.
Alexandrescu A. Marcu, 9.
Alexandrescu Nicolae, 39.
Anastasiu P. Vasile, 39, 59, 89.
Angelescu A., 2, 38, 167.
Angelescu Traian, 39, 104.
Angheluță Th., 2, 104, 105, 185.
Antonescu Gh. Gh., 75.
Antoniu V., 122, 123, 124, 125, 156, 157, 168, 170.
Apăteanu C., 143.
Aposteanu Gh. Ioan, 9, 75.
Aposteanu Sp., 143.
Apostoliu C. Ioan, 27.
Arcadian P. Nicu, 39.
Ardelea Radu, 8, 9, 10, 13, 25, 27, 29, 39, 40, 60, 61, 75, 77, 89, 92, 94, 108, 110, 138, 168.
Arghir Iancu, 2.
Atanasiu Th. C., 9, 75, 89, 90, 110, 122, 124, 125, 138, 141, 143, 155, 156, 157, 168, 169, 170, 172, 189.
Avram Iorgu, 25.
Avram Lupu, 90.
Avramescu Th. Ioan, 29, 59, 75, 77, 170, 172, 187, 189.

Babeș A., 143.
Băcanu V. Ioan, 9, 10, 138, 157, 171, 189, 190.
Baciu G. Teodor, 169, 171, 187.
Bădescu Amedeu, 60, 61, 156, 168.
Bădescu Aurelian 10, 59, 89, 90.
Bădulescu V., 2.
Băcanu Ion, 157, 169, 171, 173.
Balaban Gh., 2.
Balaban N., 2.
Ballan E., 24.
Bălășescu N. C., 29, 46, 59, 89, 90, 92, 110, 121, 123, 138, 156, 171, 173. 187, 189, 190.
Balasz D., 2.
Băleanu Gh., 39, 104.
Balogh S., 143.
Bănărescu Marin, 2.
Băncilă Mircea, 27, 44, 75.
Banciu I., 2.
Bărbulescu Gh., 39.
Bărbulescu Tudor, 60, 61, 62, 156, 168.
Bardan, V., 143.
Bârglăzan A., 39, 105.
Baron C., 2.
Bârs P., 8, 29, 60, 77, 87, 92, 93, 108, 121, 124, 125, 140, 155, 156, 157, 169, 170.
Basacov Gh., 106.
Basarab Alex., 29, 39.
Beju Traian, 25, 39, 40, 44, 58, 87, 104, 158.
Beldie D-tru, 25, 27, 39, 40, 44, 58, 59, 72, 75, 77, 89, 90, 105, 106, 140, 153.
Bercovici Emil, 39.
Bercovici Sigmund, 74, 75.
Berdan C., 39, 58, 72, 74, 75, 104, 105, 154.
Bernardis Berardo, 27, 77.
Beșchea Gh. N., 10, 25, 26, 27, 28, 39, 40, 44, 59, 75, 77, 89, 90, 91, 93, 110, 123, 124, 126, 142, 155, 156, 168, 170, 171.
Bey M. Gh., 8, 9, 10, 13, 28, 29, 60, 92, 138, 168.
Birkenthal Alex., 9, 29, 60, 121, 171, 172.
Bivolaru Nic., 40.
Blașian V., 2.
Blasko Beatrice, 25, 26, 27, 44, 58, 59, 72, 74, 75, 77, 87, 153.
Blumenfeld David, 39.
Bobârnac Mircea, 39, 104.
Bogdan C., 60, 140.
Boghiu Iosif, 39.
Bolgiu O., 24.
Bolocan Gh., 143.
Boroș P. Dan, 26, 27, 39, 40, 59.
Botea G. Emil, 171, 172, 173, 189, 190, 191.
Botea N., 7, 8, 10, 11, 13, 14, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 39, 40, 42, 46, 58, 60, 72, 75, 78, 92, 94, 104, 108, 135, 138, 153, 157, 158, 167, 168, 169.
Both Ion, 46, 123, 155, 171, 143, 173, 187.
Botez Mihai, 2.
Botez St. Mihai, 25.
Bradeteanu Cornel, 105.
Braeșter Otto, 8, 10, 25, 29, 39, 40, 42, 44, 60, 75, 92, 108, 153.
Brăileanu I. M., 39.
Brătescu M., 39, 104.
Bratoșin Radu, 29, 171, 172, 173, 189.
Bratu Gh., 2.
Brote Gh., 143.
Bruda Nic., 25.
Brül Adrian, 171.
Brustuc Gh., 89.
Budișteanu Alex., 104.
Bugeanu O., Maior, 106.
Buicliu Gh., Col., 2, 7, 11, 14, 24, 26, 36, 37, 56, 78, 87, 110, 120, 126. 142, 158, 167, 174, 190.
Burchoschi Aspasia, 46,
Burghele C., 2.
Busuioc Virgil, 60, 171, 172.
Butoescu Traian, 2.

Cădariu I., 61, 156.
Caftangioglu Const., 27, 77.
Cahane Arno, 179.
Căldăraru Leon, 57.
Călin M. Gh., 9, 25, 26, 39, 40, 42, 59, 75, 77, 89, 107, 153, 156, 170, 171.
Câlniceanu Gh., 9, 29, 59, 60, 61, 77, 89, 120, 122, 137, 153, 155, 156, 157, 169, 170.

Cândea C., 2.
Cantacuzino I., 39, 40, 104.
Căproiu M. Ion, 58.
Carabeţeanu P., 29, 60, 61, 89, 121, 157, 169, 170, 171.
Caracaş I. Gh., 25, 27, 39, 58, 75, 90, 153.
Caracostea Andrei, 26, 27, 75.
Caraman C., 2.
Caraş Gh., 143.
Cârdei V., 2.
Catz Boruh, 179.
Cazancincu Vasile, 104.
Cernăuţi Iosif, 174.
Cercel Const., 29, 59, 77, 89, 121, 123, 156, 187.
Cernes M., 8, 9, 12, 29, 60, 75, 92, 108, 138.
Chinie Mihai, 27, 75, 156, 171.
Chirilă Ioan, 26, 59, 72, 75.
Chiroiu Mihai, 27, 75, 156, 171.
Chiru Novac, 27, 39, 59.
Chiru R., 143.
Chiser Marin, 75,
Chiserescu C., 143,
Chivulescu C., 2.
Cica C., 98.
Ciocârlan M., 143.
Ciocoiu Laurenţiu, 29, 77, 89, 138.
Ciolacu Miron, 60, 61, 121, 140, 142, 155.
Ciomofoiu Horia, 27.
Ciorănescu I. Const., 25, 39, 40, 104.
Ciorănescu Nic., 87, 88, 135.
Ciurceu V., 2.
Ciută Gavril, 39.
Cizmărescu M., 2.
Cligher A., 39.
Cocea Gh. N., 77, 90.
Cocea Th., 29, 59, 89, 138.
Coconea A., 143.
Coconea Gh., 143.
Cocorandu Dan, 9, 10, 13, 29, 60, 61, 121, 124, 169.
Cocorandu M., 39.
Cogan Alter, 39.
Cojoc B. Gh., 59, 75.
Colin A., 143.
Coman A., 2, 46, 92, 139, 142.
Comănescu Al. Bălteni, 25, 39, 40, 153.
Constantinescu Gh., 2, 14, 28. 30, 135, 142, 174, 189, 190.
Constantinescu Gh. Gh., 25, 28, 29, 39, 90, 91, 92, 93, 122, 137.
Constantinescu Gr. Ioan, 25, 104.
Constantinescu Marius, 27, 75.
Constantinescu Mihai, 25, 39.
Constantinescu Petru, 173.
Constantinidi Radu, 25.
Condiescu P. Ion, 24.
Corneanu P., 2.
Corşoreanu Gh., 25, 39, 75, 105.
Coşereanu Ioan, 39, 104.
Cosma Gh., 75, 89.
Coşniţă Virgil, 39, 103.
Costăchescu N. Ionel, 25, 104.
Costăchescu V. C., 59, 60, 61, 62, 89, 124, 138, 142, 155, 156, 157, 158, 171, 173, 189, 190, 191.
Costea Oct., 26, 75.
Costinescu Antoaneta, 60, 61, 94, 121, 154, 156, 171, 173.
Cotea Gh. Gh., 39, 104.
Crăciunescu I., 2, 19, 30.
Crăciunescu Eugen, 174.
Craiu Ioan, 123, 142, 156, 170, 171, 173, 187, 189, 190.
Creţoiu A., 39, 104.
Cristescu I., 2.
Cristescu C. Ioan, 9, 10, 26, 27, 28, 29, 59, 92, 138, 173, 189.
Critz D. M., 25, 39, 74, 104, 153.
Crucian S., 143.,
Curcubată Dionisie, 27, 75, 110, 121, 123, 124, 125, 156, 157.

Damşescu Aurel, 153.
Dănciulescu Virgil, 121, 155, 156, 157, 169, 170, 171, 173, 188, 189, 190, 191.
Dângă S. Vlad, 10, 25, 26, 39, 59, 60, 61, 75, 94. 104, 109, 110, 123, 125, 143, 155, 156, 157.
Daraban N. Paul, 27, 75, 77.
Dărmănescu I., 8, 9, 10, 13, 27. 28, 29, 39, 59, 60, 75, 77, 92, 108, 138, 168.
Dăscălescu Hristache, 157, 173, 181.
David Gheorghe, 39, 106.
David I. Ion, 25, 104.
Davidsohn Mişu. 104.
Deoanca Nic., 10, 27, 75, 87, 89, 90.
Diaconescu N., 2.
Diaconescu V. Th., 10, 25, 27, 39, 40, 44, 46, 58, 59, 60, 61, 62, 75, 94, 110, 123, 125, 127, 155, 156, 157, 170, 171.
Diaconescu B. M., 39.
Diaconu Gheorghe, 39, 40.
Diaconu B. Marin, 26, 27, 75.
Diaconu C. Oprea, 29, 156, 170.
Dimitrescu Mişu, 25, 27, 39, 41, 58, 75, 104.
Dimitrescu Sile, 157, 173.
Dimitriu Emil, 59.
Dimitriu At. Ion, 156, 157, 158, 171, 173, 189.
Dimoviceanu M. D-tru, 173, 189.
Dină M. Nicolae, 27, 40, 77.
Dinescu Fl., 8, 9, 10, 26, 29, 58, 60, 75, 77, 87, 89, 90, 92, 138, 155, 167.
Dinu M. Gheorghe, 39.
Dinu Dumitru, 60, 61, 62, 89, 123, 155, 156, 169, 173.
Dobrescu Ana, 121, 123, 156, 187.
Dobromirescu Pantelie, 29, 156.
Dohomirescu P., 173.
Dordea N., 110, 123, 124, 125, 157.
Dorneanu S. Vasile, 25, 27, 39, 40, 42, 44, 75, 104, 153.
Dospinoiu N., 158.
Dragalina C., Col., 2.
Drăgan Gh., 59, 77, 89, 90, 121, 123, 124, 142, 143, 155, 156, 169, 171, 173.
Drăganciu A., 143.
Drăghiceanu M., 27, 153.
Dragnea Ovidiu, 60, 61, 156.
Dragomir Eugen, 39.
Dragomir N., 75.
Dragomirescu Ionel, 39.
Drâmbă N. C., 94, 124, 155, 171.
Dravătz I., 75, 77, 89, 90.
Drogeanu N. Paul, 27, 59, 77, 89, 153.
Dudnic Atanase 29,
Dugan C. V., 39, 75, 143.
Dumitrescu N. Const., 46.
Dumitrescu Eugen, 10, 28, 29, 60, 77, 89, 90, 94, 110, 121, 123, 125, 138, 155, 156, 157, 169, 170, 171, 173, 174, 186, 188.
Dumitrescu Gh., 2.
Dumitrescu Gh. Ion Brezuică, 25, 39.
Dumitrescu Gh. I., 26, 27, 40.
Dumitrescu Gh. I. Gostavăţ, 59, 75, 77.
Dumitrescu Gh. Marin, 39, 70, 104, 124, 125, 157, 169.
Dumitrescu Natalia, 14, 29, 59, 110, 121, 156.
Dumitriu Mihai, 104.
Dumitriu-Arad I., 2, 25, 30, 61.
Duport George, 29, 46, 60, 61, 110, 123, 124, 140, 156, 169, 171, 172, 173, 186, 187.
Duţulescu M., 2.

Effingam Grand, 61.
Eleomir, 25.
Epure Ştefan, 104.
Ern Gh., 143.
Ern S., 44, 76.

Faibovici I. Henri, 29, 46, 121, 123, 124, 141, 155, 156.
Fayon Albert, 123, 124, 155, 156, 169.
Feinstein H., 59.
Feldstein S., 8, 9, 10, 29, 30, 59, 77, 78, 90, 92, 138, 171, 173, 185.
Felix C., Col., 38.
Fericeanu St., 156, 173,
Fezi Gh., 26, 75.
Filipescu Em. Gh., 7.
Flickstein I., 29.
Floareş I. Mircea, 189.
Florea C. Alex., 39, 75, 104, 143.
Florea V. Gheorghe, 26, 28, 46, 59. 60, 61, 62, 75, 77, 89, 94, 110, 121, 124, 125, 138, 155, 169.
Florescu Th. C., 155, 156, 158, 169, 170, 171, 173, 188.
Florescu P. M., 2.
Florescu N., 29, 94.
Florescu M. Oct., 25, 26, 39, 41, 75.
Florescu Gh. Oprea, 25.
Foca I., 25, 26, 29, 59, 77.
Focşeneanu M., 7, 38, 103, 135.
Fränkel Felix, 29, 90, 94, 122, 123.
Franţiu A., 143, 155.
Franţiu Ion, 29, 46, 89, 190.
Frasineanu Maria, 25.
Fratici I., 25, 27, 75.
Frumuşelu A. Gh., 25, 27, 44, 59, 75, 123, 124, 139.
Frumuzache Const., 124.
Fumu N., 29, 94.

Gabrielescu C. V., 25, 45, 90, 104.
Gancea Vasile, 60.
Ganea Traian, 61, 89, 90, 189.

Gârleşteanu Mihai, 26, 27, 39, 41, 72, 75.
Gataianţu V. Barbu, 25, 26, 27, 28, 29, 39, 41, 59, 60, 61, 62, 75, 94, 110, 123, 124, 155, 156, 169, 170, 171, 173.
Gavrilescu I., 13, 26, 29, 39, 77, 153.
Gavrilescu Vasile, 39.
Georgescu P. Const., 39.
Georgescu D., 3.
Georgescu E., 143.
Georgescu S. Gh., 110, 123, 125, 156, 157, 170, 187.
Georgescu Jean, 26, 39, 41, 75.
Georgessu-Val N. I., 39, 41, 106.
Georgescu R., 115.
Georgescu Valer, 25, 105.
Ghelber M., 39, 41.
Gheorghe Gh. Mihai, 189.
Gheorghe David, 110.
Gheorghiu C. Adrian, 9 29, 59, 75, 77, 89, 90, 92, 94, 135, 138.
Gheorghiu Alex., 157, 189.
Gheorghiu C., 105.
Gheorghiu F., 143.
Gheorghiu Gh., 29, 46, 59, 60, 61, 75, 91, 93, 94, 104, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 123, 124, 125, 137, 142, 153, 155, 156, 157, 158, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 187, 188, 189, 190, 191.
Gheorghiu I., 143.
Gheorghiu Mihai, 173.
Gheorghiu Şerban, 103, 104, 153.
Gheorghiu Traian, 61, 89, 90.
Gheorghiu V., 143, 155, 157, 170, 171.
Gherbanovschi N., 25, 26, 59, 75, 89.
Ghermănescu M., 2, 7, 153.
Ghinicescu I. Gh., 25.
Ghişoiu I., 60.
Giotta V., 39, 104.
Giurgiu Viorel, 75.
Giurumescu C., 143.
Gogâlniceanu Mihai, 39.
Golcea Cornel, 39.
Goldstein G. A., 171, 189.
Goldstein N., 25, 39, 41, 42, 75, 153.
Goldstein Paul, 29, 59, 94.
Golopenţa Anton, 41.
Grabowschi Eug., 26, 27, 28, 39, 59, 60, 61, 75, 89, 94, 103, 108, 155.
Gradini Alex., 110, 123, 142, 143, 156
Gradini Gh., 25, 27, 39, 46, 60, 75, 110 115, 123, 142, 156, 184.
Grigore Ion, 77, 138, 143, 156, 171 173.
Grigore Niculae, 39.
Grigore Virgil, 39.
Grigorescu Ioan, 104.
Grofşoreanu I. Gh., 25, 39, 41, 87, 90, 104, 139, 140.
Grozăvescu Petre, 39.
Grozăvescu D., 11, 39.
Grozda C., 156.
Grubenman Grig., 9, 25, 39, 59, 77, 89, 92.
Grubenman Ionel, 26, 75, 153.
Grünbaum M., 7, 38, 51, 103, 104, 185.
Grünberg L. M., 29, 59, 94.
Grünberg V., 29, 94.
Gurău Almerindo, 123, 156, 170, 171.

Hacig I., 60, 61.
Haim P. L., 29, 156.
Halchias Gh., 26.
Handgief V., 75.
Haralamb Eug., 156.
Harnagea Iorguţă, 39.
Hart Lazăr, 39, 58, 59, 75, 77, 89.
Heimer Samuel, 107.
Herscovici Em., 39.
Hesz L., 143.
Hohoi Vasile, 60, 61, 77, 138.
Hotăran D. Gh., 75.
Hzeholt B., 143.
Hristea Horaţiu, 2.
Huber M., 2.
Hulubei Telemac, 27, 59.
Huzunean Gh., 39.

Iacob St. Eugen, 10, 25, 26, 27, 29, 39, 41, 46, 59, 60, 61, 62, 75, 77, 108, 123, 124, 125, 153, 156, 169, 189.
Ianculescu Oct., 25, 94, 108. 110, 121, 122, 123, 124, 125, 143, 155, 166, 167, 169.
Ieremia Petru, 10, 75, 77, 90, 138, 143, 155.
Iliescu Dan, 104.
Iliescu St. Dima, 27, 39, 41.
Iliescu M., 72.
Iliescu Mircea, 143.
Iliescu Th., 105.
Iliescu St. Virgil, 39, 41.
Iliovici Const., 27, 75.
Iliuţă I. Ion, 25, 26, 27, 29, 39, 41.
Iliuţă I. Dăbuleni, 39, 41, 59, 77, 153.
Ioachim Grigore, 27, 58, 75.
Ioachimescu A., 47, 63, 79, 95, 110, 127.
Ionescu B. Alex., 28, 29, 59, 75, 89, 90, 92, 94.
Ionescu Angelo, 11, 25, 39, 41, 75, 89.
Ionescu Anton, 75.
Ionescu Const., 39.
Ionescu K. C., 2.
Ionescu Haralamb, 26, 29, 60, 75, 89, 94, 110, 121, 123, 199.
Ionescu I., 120, 153, 167.
Ionescu Jean, 75.
Ionescu Iulius, 29, 75, 77.
Ionescu C. Niculae, 26, 29, 59.
Ionescu I. Niculae, 39, 77.
Ionescu M. Octav, 89.
Ionescu I. Paul, 25, 39, 41, 104.
Ionescu Gabriel Radu, 29, 170.
Ionescu Ştefan, 75, 143.
Ionescu A. S., 143.
Ionescu Gh. Stelian, 10, 25, 39.
Ionescu Bujor Th. Andrei, 8, 9, 10, 11, 13, 25, 26, 28, 29, 39, 41, 45, 59, 75, 77, 89, 90, 92, 104, 108, 109, 120, 122, 123, 125, 138, 153, 155.
Ionescu Bujor Th. Const., 8, 9, 10, 11, 13, 14, 25, 28, 29, 39, 45, 59, 60, 75, 77, 89, 90, 92, 104, 108, 110, 138, 153, 157, 158, 169, 170, 171.
Iordache N. Ioan, 39.
Iovănescu Dan, 155, 156, 157, 169, 170 171, 173, 174, 189.
Iovănescu Felix, 110, 121, 123, 155, 157, 158, 169, 170, 171, 173, 187.
Iovănescu D., 169, 173, 189.
Iovănescu Petru, 156.
Irhaşiu V., 46, 89, 140.
Isăcescu C. T., 60, 61, 89, 110, 155, 156.
Iscovici Paul, 8, 9, 10, 11, 13, 26, 28, 29, 44, 59, 75, 89, 90, 92, 138.
Iscu Coriolan, 125.
Istinie I. Brezuică, 41, 59, 77, 89, 99.
Istinie I. Const., 25, 26, 27, 29, 40, 41, 75.
Ivanovici A. Nic., 59.

Jancu David, 29, 59, 77, 94, 158, 170, 171, 173, 189, 190, 191.
Jecu M. Ion, 2.
Jojea Nic., 40.

Katz Lazăr, 25, 26, 27, 40, 41, 59, 75, 77, 89, 154.
Katz Pincu, 39, 104, 106, 107.
Kaufmann N., 135.
Kertesz Paul, 25, 40, 59, 87.
Koneczky Arthur, 161, 173.

Lalescu Traian, 2, 4.
Lateş I. Vasile, 29, 75, 89.
Lăzărescu I. Ion, 59, 91.
Lăzărescu M. V., 40, 41.
Lăzărescu I. St., 39.
Leescu P., 24.
Lelescu Luciliu, 39.
Leonida D., 2.
Lepădatu I. Miclea, 26, 27, 39, 75, 77, 89, 157, 169, 170, 171, 190.
Lepădatu I. Victor, 25, 27, 39, 40, 76, 77, 89, 104.
Lindenberg Lionel, 40.
Linteş I., Căp., 2.
Liteanu Gh., Lt.-Col., 2, 7.
Liuba Gh., 104.
Luca B., 143.
Luminosu P., 143.
Lupan A., 2.
Lupescu E., 13, 59.
Lupşan Nedelcu, 60.

Macri I. Ştefan, 59, 173.
Magheru I., 2.
Manafu Val., 26, 40, 41, 58, 153.
Manoil Adolf, 26, 39.
Manoil Eug., Maior, 26, 76, 155.
Manoil A. Roman, 76.
Manole Gheorghe, 44.
Manolescu I. Nic., 8, 9, 10, 11, 26, 27, 29, 39, 40, 44, 46, 58, 59, 60, 61, 62, 74, 76, 77, 78, 88, 89, 91, 93, 94, 104, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 123, 124, 125, 138, 141, 142, 143, 147, 155, 156, 157, 158, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 187, 189.
Manughevici C., 3.
Marcovici H., 58, 76, 89.
Marcovici Marcu, 40, 41, 42, 76, 77.

Marcovici Mauriciu, 26.
Mara Ştefan, 110, 156, 171, 173.
Marcu A., 60, 61, 89, 143.
Marcu O., 143.
Mardan D., 3.
Mareş Grig., 9, 36, 89. 91.
Marini Paul, 72, 153.
Marineanu Tr., 9, 59, 91.
Marinescu Al., 26.
Marinescu S. D., 26, 27, 40, 59, 88, 89.
Marinescu I. I., 26, 40, 41.
Marinescu M. Ioan, 39, 104.
Marinescu N., 156, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 189, 190, 191.
Mariş Marius, 8, 10, 26, 29, 46. 59, 60, 74, 76, 94, 110, 122, 123, 125, 138, 155, 156, 170, 171, 173.
Matac D. Radu, 59, 89.
Mătăsaru Traian, 156, 187.
Mateescu Gr., 57.
Mateescu I. I., 46. 60, 61, 156.
Maşek V., 143.
Maşia I., 143.
Mehlman Th., 39.
Meierovici F., 76.
Meyer Lazăr, 94.
Micula Ovid, 76.
Miclescu Andrei, 39.
Mihăescu D. Const., 39.
Mihăescu St. Nic., 39, 59, 89.
Mihai Octavian, 89,
Mihăilescu A. C., 76.
Mihăilescu St. Nic., 26, 40, 41.
Mihăilescu Romeo, 40, 41, 107.
Mihailescu Tase, 76, 153.
Mihaly El., 3.
Milculescu G. D-tru, 76.
Milner I., 40, 76.
Mioc V., 98.
Mirica V. Theodor, 76.
Miu M. Ioan, 26, 40, 41, 76.
Moaşa D-tru, 26.
Moaşa V., 26, 59.
Mocuţa Tr., 10, 29, 60, 110.
Mogoşan C. Remus, 9.
Moisil Gr., 24, 131.
Moldoveanu Marin, 59.
Moroianu I. Ath., 40, 41, 76, 104.
Morţun Emil, 10, 46, 60, 61, 62, 88, 93, 108, 110, 122, 123, 125, 140, 155, 169, 170.
Moşoiu Alex., 60, 61.
Motaş C., 76, 153.
Motculescu Ştefan, 77.
Muller C. Gh., 156, 157.
Munteanu Gh., 8, 9, 10, 11, 26, 29, 59, 76, 89, 91, 92.
Munteanu Zeno, 61, 156.
Musta Ştefan, 39, 104, 126, 174, 188.
Muster D., 110, 123, 125, 156, 169, 170, 171, 173, 189.
Mützel A., 59, 89.

Nadejde C., 76.
Nagy I., 143.
Naherniac O., 143.
Naneş Gh., 98.
Neacşu Gh., 40.
Neacşu Vasile, 26, 29, 40, 59, 60, 61, 76, 89, 92, 94. 104, 110, 156, 187.
Neamţu B., 143.
Nedelceanu Emil, 29.
Nedelcu Const., 40.
Nedelcu Gh. Ilie, 41.
Negreţu Nelu, 121.
Negreu V. Petruş, 89, 138, 143.
Nestor D., 7, 8, 9, 11, 13, 25, 26, 27, 28, 29, 38, 42, 59, 60, 61, 62, 75, 76, 89, 91, 92, 94, 99, 104, 110, 123, 138, 158, 167, 168, 171, 172, 173, 189, 190, 191.
Neumann Maria, 40, 72, 74, 78, 91, 153.
Nichifor Gh., 3.
Nichita C. Aurel, 158, 170, 171, 173, 188, 189.
Nicolaescu P. Ionel, 40, 41.
Nicolescu V. Gheorghe, 77, 89, 91.
Nicolescu N., 24.
Nicolescu P. Vasile, 40, 60.
Nicolau Alex., 3.
Nicolau A., 137.
Nicolau C., 8, 27, 39, 41, 93, 104, 106.
Nicolau H. C., 36.
Nicolau Gh., 143.
Nicolau I. Dobridor, 9, 13, 26, 28, 29, 59, 60, 61, 77, 89, 91, 92, 158, 168.
Nicolau Pomp., 3.
Nicolau Vasile, 61, 121, 156, 158, 171, 173.
Niculescu Alex., 24, 38.
Niculescu St. Emanuel, 8, 10, 11, 27, 28, 29, 58, 59, 77, 89, 91, 92, 138.
Niculescu Emil, 9, 10, 27, 77, 93.
Niculescu I., 143.
Niculescu Miron, 24, 38.
Niculescu S. Victor, 26.
Niţă I. D., 173.
Niţă D. Mihail, 76.
Niţescu Paula, 59.
Niţulescu Gh V., 157, 173.
Noaghea Gh., 3.
Novac A., 143.
Novacu Valeriu, 9, 10, 26, 30, 39. 40, 46, 60, 61, 62, 76, 77, 89, 91, 92, 94, 110, 121, 123, 125, 155, 156, 158, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 188, 189, 190, 191.

Oana Ion, 26, 40.
Olaru Th. Enea, 40, 76.
Olteanu E., 143.
Olteanu Nic., 60, 61, 62, 120.
Oncica I., 98.
Onicescu O., 3.
Oprea N. Gh., 40
Oprescu I. Gh., 40.
Oprişan Ernest, 39.
Orăşeanu Cezar, 3,
Orăşeanu Gr., 3.
Orbonaş Iuliu, 104.
Otopeanu C., 3.

Pamula Alex., 25.
Pănescu I., 143.
Pantazi Alex,, 110, 124, 156, 158, 169. 170, 171, 173, 188.
Panţu Z. I,, 9, 10, 30, 59, 60, 61, 62, 88, 89, 91, 93, 94, 108, 110, 121, 122, 124, 125, 126, 142, 155, 156, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 189, 190, 191.
Panu Aurel, 40, 41.
Pârvănescu I , 170, 173, 190.
Pârvu Aurel, 30, 60, 61, 15[illegible].
Păsăreanu Tr., 157, 171, 173.
Paşcanu V., 96.
Pascariu Alex., 10, 59, 60, 61, 76, 109, 143, 155, 156.
Pasco Wilhelm, 42, 76.
Pascu Sebastian, 156, 169, 171.
Pascu Silvio, 61, 110.
Pâslaru I. Nic., 10, 58, 59, 76, 77, 99.
Patriciu Aurel, 76.
Pătroianu Mihail, 39, 40, 104, 106.
Patron Nic., 10, 30, 77, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 189, 190, 191.
Păunescu Tr., 76.
Pavel Nicolae, 174, 189.
Pavelescu Th. Mircea, 59, 124, 156, 169.
Percea V., 40, 41, 104.
Petreanu M. P., 40.
Petrescu A., 3.
Petrescu N. D. 40.
Petrescu St. Al. Dan, 26, 41, 76.
Petricoane D. M., 3.
Petrovici C., 143.
Petrulian St. N., 39.
Philip Iosef, 60, 156.
Piso I., 143.
Placă M., 26, 27, 76.
Podariu Alex., 9, 10, 26, 28, 30, 40, 46, 60, 61, 62, 76, 77, 89, 91, 92, 108, 110, 124, 125, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 172, 173, 174, 187, 189, 190, 191.
Podeanu Aurel, 40, 41, 42, 58, 72, 74, 153.
Pol Mircea, 143.
Polaczek Franz, 26, 40, 41, 107.
Pop Alex., 40, 41,
Pop Emilian, 40, 104.
Pop Iulian, 10, 11, 26, 27, 40, 44, 59, 76, 89, 91.
Popa Andrei, 40.
Popa Ilie, 40, 41, 76.
Popa Octavian, 26.
Popa Pe rescu Nic., 26, 59, 76.
Popa Ştefan, 189.
Popeea C. Ovid, 39, 104.
Popescu T. Alex., 26, 30, 60.
Popescu I. Alex., 76, 91.
Popescu Corneliu, 8, 9, 10, 11, 27, 28, 30, 41, 59, 62, 76, 77, 89, 91, 92, 94, 104, 108, 110, 124, 125, 142, 155, 156, 157, 158, 169, 170.
Popescu I. Dumitru, 30.
Popescu E., 26.
Popescu Epaminonda, 40, 41, 153.
Popescu Gh. Floru, 40.
Popescu Iancu, 104.
Popescu N. Ioan, 155, 156, 173.
Popescu Dem. Marin, 40, 41.
Popescu Mircea, 61.
Popescu Nicolae, 106.
Popescu Spirea 40, 41.
Popescu Stelian, 30, 46, 59, 60, 61, 89, 91, 92, 108, 125, 126, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 188, 189, 190, 191.

Popescu T., 143.
Popescu St. Toma, 173, 189.
Popescu C. Virgiliu, 14, 30, 59, 60, 77, 89, 120, 126, 138, 143, 156, 172, 189.
Popluca N. Mircea, 10, 76, 110.
Popovici Aurel, 25, 26, 27, 40, 41, 42, 44, 58, 74, 76, 77, 88, 89, 91, 93, 137, 153.
Popovici C. C., 25, 26, 39, 40, 58, 87, 104. 110, 153, 157.
Popovici I. Dan, 27, 36, 89
Popovici P. Gh., 77,
Popovici Th. Ioan, 25, 26, 27, 39, 40, 41, 42, 44, 46, 58, 72, 74, 75, 89, 91, 104, 106, 107, 153.
Popovici Lucia, 143.
Popovici Mihai, 26, 27. 40, 41.
Popovici Th. Th., 30, 92.
Popovici Tib., 7, 24, 83, 106, 135.
Popper Erwin, 46, 60, 61, 141, 155, 156.
Potârniche Octav, 59.
Predescu Niculae, 26, 40.
Propst Jean, 104
Protopopescu I., 3, 9, 14, 42, 62, 126, 150, 158, 167, 174.
Protopopescu Nestor, 156.
Prună I. D., 171, 173.
Puiu Gh , 143.
Purcariu Ilie, 3.
Purdilă C., 26, 40, 41, 42, 59, 76, 77, 89.
Puşcă Toma, 26, 27, 44, 59.
Puşcariu Mihail, 60.

Rabinovici H., 141.
Rădulescu Mihai, 10, 46, 59, 60, 61, 62, 77, 94, 110, 120, 124, 125, 155, 156, 157, 169, 170, 171.
Rădulescu Nic., 41.
Rădulescu Titu, 104.
Rădulet Remus, 73, 104, 107.
Raiciu V. Const., 26, 30, 77.
Ramedev I., 143.
Râmniceanu I. Cristian, 191.
Râmniceanu L. R., 39, 40, 76, 153.
Rappaport A., 77.
Râpeanu Virgil, 8, 9, 10, 26, 27, 30, 44, 59, 60, 76, 88, 89, 91, 93, 94, 108, 121, 124, 125, 142, 169.
Rătan F., 44, 76.
Răuţ Const., 39
Reiner Gh., 173, 189.
Rigani G., 39.
Rizescu Gh. 143.
Robu Ionel, 61, 121, 170, 171, 173.
Roibănescu C., 3, 38.
Roman I. I., 26, 30, 40, 59, 60, 61, 76, 155, 156, 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174, 188, 189, 191.
Roşu Alex., 26, 40. 41, 153.
Rotaru Barbu, 76.
Rucăreanu Nic., 8, 9, 30, 40, 44, 46, 76, 89.
Rusanda Gh., 46, 60, 89, 139, 141.

Sabetay Andrei, 189.
Săcăroiu D-tru, 60, 61, 156, 171, 173, 189.
Saegiu Emil, 3.
Samoilă D-tru, 26, 30, 39, 60.
Săndulescu I. Ion, 59.
Săndulescu I. Mihai, 155.
Sava I.. 143.
Saveliev V., 14.
Savin Ioan, 158, 171, 172, 173, 189, 191.
Savu S., 78, 156, 157.
Scarlat V. D., 173.
Schächter Arie, 41.
Schächter Osias, 26, 40, 41, 42, 59, 88.
Schileru Dili, 46, 74, 78.
Schor Oscar, 138.
Scraba A., 143.
Scripcă Laur, 25, 26, 27, 30, 39, 40, 60, 76. 88, 89. 91, 93, 138.
Scripcă Mihai, 40, 41, 77 89, 171, 173.
Scripcă Valentin, 40.
Segall Leon, 8, 10, 11, 28, 30, 59, 60, 76, 77, 89, 91, 92, 108, 138, 153.
Segall Danil, 26.
Segârceanu D. Const., 30, 46, 60, 61, 88, 121, 124, 125, 141, 155, 156, 157, 169.
Segârceanu Nic., 27, 75, 167.
Semo Santo 156, 157, 171.
Septelici Raul, 39.
Şerb T., 143.
Şerban Aurel, 26, 76, 77, 89.
Şerban Tiberiu, 26, 40, 41, 72.
Şerbănescu Dum., 3.
Sergescu P., 3, 87, 185.
Severin Marcel, 26, 27, 40, 59, 76, 77.
Severineanu C., 3.
Sfinţescu D., 59, 77.
Sigal Louis, 30, 59, 77, 94.
Silion Gh. Ioan, 25, 26, 39, 40, 104.
Silistrărianu C., 49, 59, 125, 141.
Simionescu D. Gh., 25, 26, 40, 41, 42, 104, 106.
Simionoff Kindin, 11, 60, 78, 89, 108, 109, 121, 122, 124, 125, 155, 156, 157, 169. 170, 186.
Simniceanu Sava, 3.
Sipoteanu I., 143.
Sobel Mircea, 8, 9, 10, 11, 13, 28, 30, 60, 92, 108, 138, 168.
Socaciu Nic., 27, 76, 77, 107.
Sofroniuc D., 30.
Şoimulescu S., 157, 170, 171, 173, 189.
Solacolu Şerban, 39.
Solniţaru V. Longin, 191.
Solomon P., 13.
Spacu Petre, 10, 11, 26, 27, 76, 93.
Spârchez Zeno, 26, 27, 40, 41, 72.
Spineanu Cezar, 3.
Sprânceană Gh., 156, 157, 158, 171, 173, 189.
Staicu Irimie, 26.
Stamatiu Mihail, 39, 40, 41, 76, 153.
Stamatescu I. Val., 40, 41.
Stambuleanu Adr., 39.
Stăncescu, 172.
Stan I. Aurelian, 61, 62, 89, 91, 110, 121, 138, 155, 156, 158, 173, 189, 190, 191.
Stan I. C., 89, 110, 121, 138, 156, 170, 171, 172, 173, 174, 190.
Stăncescu C., 3.
Stănciulescu Dan, 40, 76.
Stănciulescu Gh., 105.
Stănculescu C., 105.
Stănescu I. A., 27, 40, 76.
Stănescu Th., 40, 41, 173.
Stavrat C., 143.
Steblea Ştefan 156, 173.
Ştefănescu Emil, 30, 39, 41, 58, 59, 72, 74, 87, 94, 105, 106, 142, 153.
Ştefulescu I. Ghica, 105.
Steriade C., 60, 61, 110, 121.
Steriopol D. Ştefan, 26.
Stern B. Artur, 59.
Stoenescu Al. I., 24.
Stoian I., 76.
Stoica N. Aurel, 8, 9, 10, 11, 13, 26, 28, 29, 30, 40, 59, 60, 62, 76, 77, 78, 89, 91, 92, 94, 105, 108, 119, 121, 124, 125, 141, 153, 155, 156, 158, 168, 170, 171, 172, 173, 188, 189, 190, 191.
Stoica D-tru, 27, 59, 106.
Stoicescu M., 3.
Stoicescu Theodor, 26, 27, 40, 41, 42, 59, 89, 91, 153, 170, 188.
Stoicoiu M. Traian, 60, 61, 110.
Stroescu Gheorghe 42.
Surugiu V., 26, 27, 41.
Şuşelescu Th. Ioan, 40, 105.

Tărăbuţă Paul, 25, 26, 39, 40, 58, 72, 74, 75, 105, 106, 107, 153.
Tăraş Vasile, 8, 9, 10, 11, 13, 25, 26, 28, 39, 40, 41, 42, 60, 75, 76, 77, 88, 91, 92, 105, 106, 108, 138, 143, 153, 168.
Tauber Alex., 39. 105, 106.
Teodorescu C. C., 30, 59, 77, 92.
Teodorescu C., 3, 15, 18, 31, 34, 47, 50, 63, 66, 79, 82, 95, 98, 101, 110, 114, 127, 130, 146, 157, 162, 175, 184.
Teodorescu M. D., 25, 40, 41.
Teodorescu N., 6, 7, 9, 11, 13, 26, 29, 30, 40, 41, 59, 60, 72, 74, 76, 78, 88, 89, 91, 92, 93, 105, 138.
Teodorescu St. Paul, 60.
Teodorescu V., 143.
Teodoru C. C., 41.
Teodosiu Avram, 3.
Terfeleag Olga, 39.
Thierrin Gh., 3.
Tomescu Valeriu, 169, 173.
Toporescu E., 3.
Triculescu Ion, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 173. 188, 189.
Trofimov I., 143.
Trofimov P., 76, 153.
Troia L., 59, 61, 77.
Tudor Romulus, 110.
Tudorache S., 143.
Tudose Tănase, 30, 124, 156.
Tunaru Traian, 11, 78, 93.

Tanovici V., 9.
Tanovici, V. C., 10, 11, 20, 27, 40, 41, 44, 46, 59, 60, 76, 77, 78, 88, 93, 94, 108, 110, 124, 125, 141, 142, 155, 156, 157, 158, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 188.

Țari N. Gh., 8, 30, 59, 60, 61, 77, 94, 110, 121, 122, 124, 125, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 173, 189.
Țino O., 3.
Țițeica Gh., 57.

Udriski Traian, 39, 105.
Ulea Titus, 10, 26, 27, 40, 44, 59, 76, 89.
Ungureanu D. Gh., 156, 188.
Urzică Aurel 39, 105.
Ușacov D., 30.

Vâlceanu N. Ion, 171, 173, 189.
Vâlcovici V., 3, 27, 61, 90, 174, 190.
Vâlsănescu Viorel, 173, 190.
Vasilescu Al., 9, 10, 89.
Vasilescu Bart., 8, 9, 10, 11, 26, 28, 30, 40, 41, 59, 60, 61, 62, 76, 77, 89, 92, 110, 121, 124, 125, 126, 141, 142, 156, 157, 158, 169. 170, 171, 173, 186, 188,
Vasilescu Mircea, 39.
Vasiliev Ilie, 30, 124, 125, 138, 156, 157, 169, 170.
Vasiliu Gh. Gh., 8, 9, 10, 11, 13, 26, 27, 28, 30, 40, 46, 59, 60, 61, 76, 78, 89, 92, 108, 121, 125, 126, 138, 141, 155, 156, 157, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 189, 190.
Vasiliu C. Ion, 40, 41, 106.
Vasiliu I., 24, 25, 36, 39, 40, 105.
Vasiliu Nic., 26, 76.
Vasiliu M., 3.
Velea Gr. Mihai, 26. 41, 76.
Vlad I. V., 3.
Vlădea Ion, 8, 9, 11, 13, 26, 28, 30, 40, 60, 72, 75, 76, 77, 91, 92, 108, 143, 153, 155, 156, 157, 168, 169, 170, 171, 172, 173.
Vladimirschi V., 10, 46, 60. 61, 62. 109, 110, 121, 125, 126, 141, 142, 154, 155, 156, 169, 186.
Voinescu D. Ion, 26, 27, 59, 76.
Vonica C. Ioan, 156, 169, 173.
Vrânceanu Gh., 24.
Vulpanovici B., 8, 24, 40, 41, 42, 57, 59, 77, 91.

Wagner I., 26, 40.
Wagner W., 41.
Weintraub Mandy, 60, 61. 121, 156, 171.
Weiss Leon, 7, 39, 134.
Weiss Solomon, 39.
Wetter Ana, 27.
Winkler A. Alfred, 10, 11, 13, 28, 30, 46 59, 60, 77, 89, 91, 94, 108, 109, 110, 122, 126, 136, 139, 155, 157, 169, 170, 188.

Zagaican Ilie, 110, 121, 123, 125, 126, 155, 156, 157, 169, 171, 172, 173, 189, 190.
Zaharia Coriolan. 171, 173.
Zaharia Ion, 124, 156, 157, 170, 173, 188, 189.
Zamfir D. Ilie, 30.
Zamfirescu Alex., 105.
Zamfirescu Gh. Ion, 9, 27, 30, 59, 60, 61, 62. 75, 76, 77, 89, 91, 92, 94, 121, 124, 138, 153, 155, 156, 158, 169, 170, 171, 191.
Zamfirescu Ion, 30, 40, 76, 77, 89.
Zănciulescu G. Virgil, 173.
Zapan Gr., Căp., 3, 67.

Abonamentul pentru anul 1927 este

100 (una sută) lei

și se trimete prin mandat poștal la administrația revistei.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

5 lei